一般入試前期A日程1日目

数　学

$\boxed{\text{I}}$　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点　40）

(1)　a を実数とする。2 次方程式 $x^2 + ax - (2a + 4) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，

$a =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，この方程式が正の解と負の解をもつための必要十分条件は，

$a >$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$\triangle$ABC が AB $= 2$, BC $= 4$, AC $= 3$ を満たすとする。

このとき，$\sin\angle$ BAC $=$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とすると，

$\triangle$OBC の面積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　$\log_8 2 =$ $\boxed{\text{オ}}$ である。また，不等式 $\log_2 x + \log_8 x > 2\,(\log_2 x)\,(\log_8 x)$ を解くと，

$1 < x <$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　1 個のさいころを 3 回続けて投げて，出た目の数を順に a, b, c とする。

積 abc が偶数である確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

$a^2 + b^2 + c^2$ を 4 で割った余りが 1 である確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 4$ である数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，

$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められた数列を $\{b_n\}$ とする。

(i) $b_{n+1} = b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) $b_{n+1} = 3\,b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるとき，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\text{イ}}$ であり，

$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) O を原点とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{A}(0, -1, 2)$，$\mathrm{B}(-1, 0, p+2)$，$\mathrm{C}(1, p-2, 3)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4$ とする。また，点 H は 3 点 A, B, C を含む平面上にあり，直線 OH はこの平面に垂直であるとする。このとき，$p = \boxed{\text{エ}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$s = \boxed{\text{オ}}$，$t = \boxed{\text{カ}}$ であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \boxed{\text{キ}}$ である。

Ⅲ　【数学 ① のみ解答】

2 つの関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$, $g(x)=\cos(ax+b)$ について，次の問いに答えよ。
ただし，a, b は実数とし，$0 \leqq b \leqq \pi$ とする。（配点　40）

(1) $f'(x)$ および $g'(x)$ を求めよ。

(2) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$ が成り立つとき，定数 a, b の値を求めよ。

(4) a, b を (3) で求めた値とし，$h(x)=\begin{cases} f(x) & (0 < x \leqq \pi) \\ g(x) & (-\pi \leqq x \leqq 0) \end{cases}$ とする。

x についての方程式 $h(x)=k$ が実数解をもつような実数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-\sqrt{x}}$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $y = 2x - \sqrt{x}$ を微分せよ。

(2) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(3) $A = \lim_{x \to \infty} f(x)$ とするとき， A の値を求めよ。
また，このとき $f(p) = A$ を満たす実数 p を求めよ。

(4) p を (3) で求めた値とする。$\sqrt{x} = t$ とおき置換積分法を用いて，
定積分 $\displaystyle\int_1^p f(x)\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathrm{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。（配点　40）

(1) $m > 0$ とし，$\triangle$OAB が $\mathrm{OA} = m$，$\mathrm{AB} = 10$，$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$ を満たすとする。

辺 AB を $1:4$ に内分する点を C とするとき，$\tan\angle \mathrm{AOC} = \boxed{\quad ア \quad}$ であり，

$\tan\angle \mathrm{BOC} = \boxed{\quad イ \quad}$ である。

よって，相加平均と相乗平均の大小関係を用いることにより，$\tan\angle \mathrm{BOC}$ の

最大値は $\boxed{\quad ウ \quad}$ であることがわかる。さらに，$\tan\angle \mathrm{BOC}$ が最大値をとるとき，

$\angle \mathrm{BOC}$ の二等分線と辺 AB の交点を D とすると，$\mathrm{OD} = \boxed{\quad エ \quad}$ である。

(2) k を -1 でない実数とする。

直線 $y = -2x + 5k$ に関して点 $\mathrm{P}(-4, 3)$ と対称な点を Q とすると，

直線 PQ の方程式は $y = \boxed{\quad オ \quad}$ であり，Q の座標は $\left(\boxed{\quad カ \quad}, \boxed{\quad キ \quad}\right)$ である。

点 Q を中心とする半径 1 の円 C について，

直線 $y = x - 1$ が円 C によって切り取られてできる線分の長さが $\sqrt{2}$ となるとき，

$k = \boxed{\quad ク \quad}$ または $k = \boxed{\quad ケ \quad}$ である。ただし，$\boxed{\quad ク \quad} < \boxed{\quad ケ \quad}$ とする。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ は $x = a,\ x = b$ で極値をとる。ただし，$a < b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$a,\ b$ の値を求めよ。

(2) 3 点 $(0,\ 0)$, $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$, $\bigl(b,\ f(b)\bigr)$ を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数 $g(x)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $g(x)$ について，曲線 $y = g(x)$ と x 軸 および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(4) (2) で求めた $g(x)$ について，x についての方程式 $\bigl\{f(x) - k\bigr\}\bigl\{g(x) - k\bigr\} = 0$ がちょうど 3 つの実数解をもつような実数 k のとりうる値の範囲を求めよ。