一般入試前期A日程１日目

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	-4
イ	-2
ウ	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
エ	$\frac{4\sqrt{15}}{15}$
オ	$\frac{1}{3}$
カ	4
キ	$\frac{7}{8}$
ク	$\frac{3}{8}$

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$3n-2$
イ	3^n
ウ	$\frac{3^n-1}{2}$
エ	3
オ	$-\frac{3}{5}$
カ	$\frac{2}{5}$
キ	$\sqrt{2}$

Ⅲ　**【数学①のみ解答】**（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1)　$f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$,　$g'(x) = -a\sin(ax+b)$

(2)　$f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，$f'(x) = 0$ となる x の値は，$x = -\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi$

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}$	$\searrow$	0

増減表より，関数 $f(x)$ の最大値は $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}$ であり，

最小値は $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$ である。

(3)　$f(0) = g(0)$ より，$\cos b = 0.$　$0 \leqq b \leqq \pi$ より，$b = \frac{\pi}{2}$

$f'(0) = 1,\ g'(0) = -a\sin b = -a$ より，$a = -1$

(4)　$g(x) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ である。関数 $y = h(x)$ のグラフより，

$-1 \leqq k \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi}$

$\boxed{\text{Ⅳ}}$ **【数学①のみ解答】**(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $y' = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2) $f'(x) = -\dfrac{x - 4\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}\left(2x - \sqrt{x}\right)^2} = 0$ となるのは，

$x - 4\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4\sqrt{x} + 1 = 0$ より，$\sqrt{x} = 2 \pm \sqrt{3}$

よって，$x = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$

(3) $A = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - 1}{2x - \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$

$f(p) = \dfrac{p - 1}{2p - \sqrt{p}} = \dfrac{1}{2}$ より，$p = 4$

(4) $\sqrt{x} = t$ とおくと，

$\displaystyle\int_1^p f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{x - 1}{2x - \sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 \frac{t^2 - 1}{2t - 1}\,dt$

$= \displaystyle\int_1^2 \left(t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{2t - 1}\right) dt$

$= \displaystyle\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}\log(2t - 1)\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{4}\log 3$

$\boxed{\mathrm{V}}$ 【数学②のみ解答】

ア	$\dfrac{2}{m}$
イ	$\dfrac{8m}{m^2+20}$
ウ	$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
エ	$2\sqrt{10}$
オ	$\dfrac{x}{2}+5$
カ	$4k$
キ	$2k+5$
ク	$\dfrac{5}{2}$
ケ	$\dfrac{7}{2}$

VI 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4) = 0$ を解くと，$x = 2,\ 4$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

$x = 2$ で極大値 20，$x = 4$ で極小値 16 をとる。　$a = 2,\ b = 4$

(2) $g(x) = px^2 + qx + r$ とすると，$\begin{cases} r = 0 \\ 4p + 2q + r = 20 \\ 16p + 4q + r = 16 \end{cases}$ が成り立つので，

これを解くと，$p = -3,\ q = 16,\ r = 0$ なので，$g(x) = -3x^2 + 16x$

(3) $S = \displaystyle\int_2^4 (-3x^2 + 16x)\,dx = \Big[-x^3 + 8x^2\Big]_2^4 = 40$

(4) $f(x) - k = 0$ の実数解の個数は，$\begin{cases} 1 & (k < 16,\ 20 < k) \\ 2 & (k = 16,\ 20) \\ 3 & (16 < k < 20) \end{cases}$ であり，

$g(x) - k = 0$ の実数解の個数は，$\begin{cases} 0 & \left(k > \dfrac{64}{3}\right) \\ 1 & \left(k = \dfrac{64}{3}\right) \\ 2 & \left(k < \dfrac{64}{3}\right) \end{cases}$ である。

$k = 0,\ 16,\ 20$ のとき，2つの方程式が同じ解をもつことより，

$(f(x) - k)(g(x) - k) = 0$ がちょうど3つの実数解をもつのは，

$k < 0,\ \ 0 < k \leqq 16,\ \ 20 \leqq k < \dfrac{64}{3}$ のときである。