一般入試前期Ａ日程２日目

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	-5
イ	-2
ウ	23
エ	110
オ	-2
カ	$\sqrt{10}$
キ	32
ク	55

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$4n-3$
イ	5^n-1
ウ	405
エ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
オ	15
カ	$\sqrt{3}-1$

Ⅲ 【数学①のみ解答】（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1)　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より，$y = \dfrac{x}{e}$

(2)　$g'(x) = -\dfrac{1}{x} + p$ より，$\dfrac{1}{e} = -\dfrac{1}{e} + p$ であるので，$p = \dfrac{2}{e}$ である。

また，曲線 $y = g(x)$ は点 $(e,\,1)$ を通るので，$1 = -\log e + 2 + q$ より，

$q = 0$

(3)　$x > 0$ の範囲で，$g''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ である。よって曲線 $y = g(x)$ は

$x > 0$ で下に凸である。

(4)　(3) より $g(x) \geqq f(x)$ なので，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_e^{e^2} \{g(x) - f(x)\}\,dx = \int_e^{e^2} \left(-2\log x + \frac{2x}{e}\right)\,dx \\ &= \left[-2(x\log x - x) + \frac{x^2}{e}\right]_e^{e^2} = e^3 - 2e^2 - e \end{aligned}$$

Ⅳ 【数学①のみ解答】（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1) $f(t)=\pi(9t-t^3)$ を微分して，$f'(t)=3\pi(3-t^2)$.

t	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-6\sqrt{3}\pi$	$\nearrow$	$6\sqrt{3}\pi$	$\searrow$

増減表より，$x=-\sqrt{3}$ のとき極小値 $-6\sqrt{3}\pi$,

$x=\sqrt{3}$ のとき極大値 $6\sqrt{3}\pi$ をとる。

(2) $\dfrac{dx}{dt}=-3\pi(3-t^2)\sin\pi t(9-t^2)$ $\quad$ $\dfrac{dy}{dt}=3\pi(3-t^2)\cos\pi t(9-t^2)$

よって，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=9\pi^2(3-t^2)^2$

(3) 点 P は原点 O を中心とする半径 1 の円の周上を動く。

また，$0\leqq t\leqq 3$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$f'(t)$	9π	$+$	0	$-$	-18π
$f(t)$	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}\pi$	$\searrow$	0

増減表と $10\pi<f(\sqrt{3})=6\sqrt{3}\pi<11\pi$ より，$t=0$ から $t=\sqrt{3}$ までに

5 回通過する。同様に $t=\sqrt{3}$ から $t=3$ までにも 5 回通過する。

よって，$N=10$.

(4) $$s=\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^3 3\pi\left|3-t^2\right|dt$$

$$=3\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)\,dt+\int_{\sqrt{3}}^3(t^2-3)\,dt\right\}$$

$$=3\pi\left(\left[3t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[\frac{t^3}{3}-3t\right]_{\sqrt{3}}^3\right)=12\sqrt{3}\pi$$

V　【数学②のみ解答】

ア	$\frac{4}{3}$
イ	$-\sqrt{3}$
ウ	$\frac{2}{3}\pi$
エ	$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$
オ	$\sqrt{3}$
カ	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
キ	$\frac{1}{2}$
ク	m^2+1
ケ	$2y$

$\boxed{\mathrm{VI}}$ 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = 2x + \dfrac{k^2-1}{k}$

(2) x 軸との交点の x 座標は $x=-k,\ \dfrac{1}{k}$ であり，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-k}^{\frac{1}{k}} \left(-x^2 - \frac{k^2-1}{k}x + 1\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{k^2-1}{k}\cdot\frac{x^2}{2} + x\right]_{-k}^{\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{6}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3 \end{aligned}$$

(3) $k>0$ における $k+\dfrac{1}{k}$ の最小値を調べればよい。

相加平均と相乗平均の大小関係から $k+\dfrac{1}{k} \geqq 2$ であり，

等号は $k=1$ のとき成り立つので， $S=\dfrac{4}{3}$ が最小値。

(4) $k=1$ より， $f(x)=x^2-1,\ f'(x)=2x$

点 $(t,\ t^2-1)$ における接線の方程式は $y-(t^2-1)=2t(x-t)$ であり，

点 $(0,-2)$ を通ることから $t=\pm1$

したがって，求める接線の方程式は $y=2x-2,\ y=-2x-2$