一般入試後期D日程

数　学

I　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1)　x についての連立不等式 $\begin{cases} x-2 \leqq 4a+3x+1 \\ x+3 \geqq 2(x-2) \end{cases}$ を満たす整数 x が

ちょうど 5 個あるとき，実数 a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} \leqq a < \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$(x^3+2y^2)^7$ の展開式における y^{14} の項の係数は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，

x^9y^8 の項の係数は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　x を 1 でない正の実数とする。このとき，$\log_2 x - 6\log_x 2 = 1$ を満たす x の値は

$x = \boxed{\text{オ}}$ ，$\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

(4)　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ の 10 枚のカードが箱の中に入っている。

この中から 3 枚のカードを同時に取り出す。

このとき，取り出した 3 枚のカードの数の和が奇数になる確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

取り出した 3 枚のカードの数の積が 3 の倍数になる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) $\cos\theta = t$ とおいて $\cos 2\theta$ を t の式で表すと，$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}}$ である。

また，$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ であることから，$\cos 3\theta$ を t の式で表すと，

$\cos 3\theta = \boxed{\text{イ}}$ である。

さらに，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = 2\cos 3\theta - 3\cos 2\theta \cos\theta$ の

最小値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，そのときの θ の値は，$\theta = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 座標空間内に 3 点 A(1, −2, 3)，B(2, 0, 4)，C(0, −3, 4) がある。

このとき，$\cos\angle\mathrm{BAC} = \boxed{\text{オ}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

また，3 点 A, B, C を通る平面上に点 D(0, 1, z) があるとき，

z の値は，$z = \boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ 【数学 ① のみ解答】(配点 40)

(1) a を正の実数とし，$f(x)=\log(ax)$ とするとき，次の空所を埋めよ。

ただし，自然対数の底を e とする。

(i) 関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\boxed{\text{ア}}$ であり，

不定積分は $\displaystyle\int f(x)dx=\boxed{\text{イ}}+C$ (C は積分定数) である。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点を $\mathrm{P}(p,\,0)$ とし，

曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=1$ の交点を $\mathrm{Q}(q,\,1)$ とするとき，

p と q を a の式で表すと，それぞれ $p=\boxed{\text{ウ}}$，$q=\boxed{\text{エ}}$ である。

(iii) p と q を (ii) で求めた値とする。

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=q$ で囲まれた図形の面積を S_1，

曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=1$，$x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とすると，

$\dfrac{S_2}{S_1}=\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) i を虚数単位とする。複素数平面上の点 z について，次の空所を埋めよ。

(i) $|2z+3i|-|2z-2|=0$ を満たす点 z の全体は，点 $z_1=1$ と 点 $z_2=\boxed{\text{カ}}$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

(ii) $4(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=1$ を満たす点 z の全体は，点 $z_3=\boxed{\text{キ}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ク}}$ の円を表す。ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数である。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

点 O を原点とする座標平面上に点 P$(p,\,0)$ がある。ただし，$0 < p < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 曲線 $y = \sin x$ 上の点 Q$(p,\,\sin p)$ における法線 l の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた直線 l と y 軸の交点を R$(0,\,r)$ とするとき，r を p の式で表せ。

(3) 曲線 $y = \sin x \;\; (0 \leqq x \leqq p)$ と x 軸および直線 $x = p$ とで囲まれた図形の面積 $S(p)$ を求めよ。

(4) 四角形 OPQR の面積を $T(p)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{p \to +0} \frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 三角形 OAB について，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=7$，$\mathrm{AB}=5$ とする。また，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線が辺 AB と交わる点を C，$\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線が線分 OC と交わる点を D とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=s_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_1\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すとき，$s_1=\boxed{\text{ア}}$，$t_1=\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s_2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すとき，$s_2=\boxed{\text{ウ}}$，$t_2=\boxed{\text{エ}}$ である。

(iii) AC の長さは $\mathrm{AC}=\boxed{\text{オ}}$ である。

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s_3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すとき，$s_3=\boxed{\text{カ}}$，$t_3=\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=-17$，$a_{n+1}=2a_n+3^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$ を満たすとする。

(i) $a_2=\boxed{\text{ク}}$ である。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{a_n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$ と定めると，

$b_{n+1}-\boxed{\text{ケ}}=\dfrac{2}{3}\left(b_n-\boxed{\text{ケ}}\right)$ となることから，

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{コ}}$ である。

(iii) 数列 $\{a_n\}$ について，$a_n>0$ となる最小の n は $\boxed{\text{サ}}$ である。

ただし，$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ とする。

$\boxed{\mathrm{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = p$ が異なる 3 つの実数解をもつような実数 p のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) q を $f(x)$ の極大値とするとき，方程式 $f(x) = q$ の解をすべて求めよ。

(4) m を (3) で求めた解の中で最大の値とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^m f(x)dx$ の値を求めよ。
ただし，$\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ (C は積分定数) を用いてもよい。