物　理

Ⅰ　空所を埋め，問いに答えよ。 オ ， カ ， キ には，選択肢から適切なものを選び，その記号を答えよ。(配点 60)

図１(a)のように長さが L で質量の無視できる軽くてのびないひもの上端を天井に固定し，下端にはボールの発射装置を固定する。発射装置の大きさは無視できるとする。この発射装置の運動を床の上に静止した人から観測する。静止させた状態での発射装置の位置を原点Oとして，水平右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸をとる。質量 m のボールを複数個発射装置に入れた。ボールを含む発射装置全体（以後，装置とよぶ）の質量を M とする。装置は一定の時間間隔 T でボールを１個ずつ x 軸の負の向きに打ち出す。装置がボールに与える力積はいつも同じであるとし，ボールの大きさは無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。

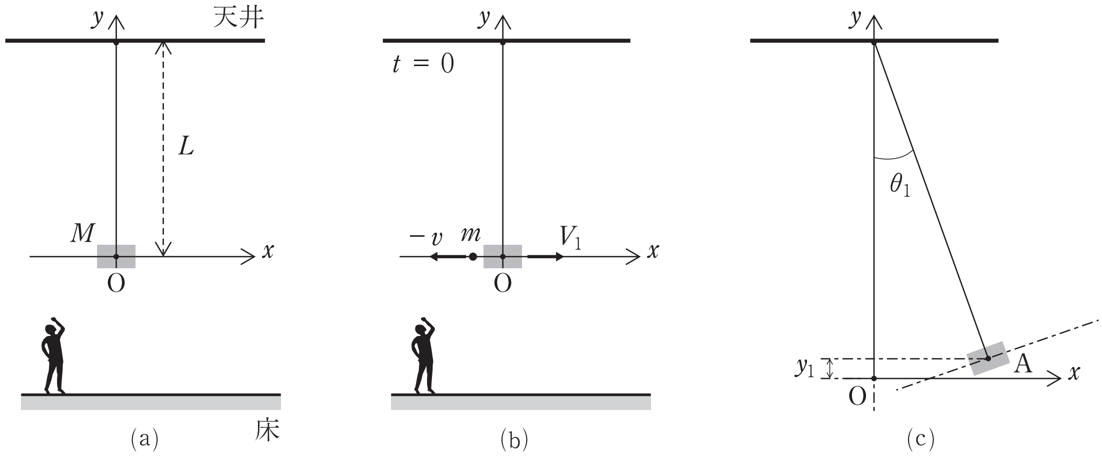

図１

（１）　時刻 $t=0$ に，図１(b)に示すように静止した装置からボール１個が x 軸の負の向きに打ち出された。このとき，ボールの速度は $-v$ であった。運動量保存の法則から，打ち出した直後の装置の速度を V_1 とすると次式が成り立つ。

$$(M-m)V_1+\left(\boxed{\quad ア \quad}\right)=0$$

この式より，$V_1=\boxed{\quad イ \quad}$ と書ける。その後，装置はひもをたるませることなく右向きに振れ，図１(c)のように最も右に振れた点Aでの装置の高さは y_1 となった。力学的エネルギー保存の法則を考えると，y_1 は V_1 と g を用いて次のように表せる。

$$y_1=\boxed{\quad ウ \quad}$$

このとき，ひもは鉛直方向に対し角度 θ_1 だけ振れた。$\cos\theta_1$ を m, M, v, L, g を用いて表すと次のようになる。

$$\cos\theta_1=\boxed{\quad エ \quad} \qquad ①$$

（２）　装置の振れ角 θ_1 が十分に小さい条件をみたすならば，装置は x 軸上を運動するとみなせる。①式に基づくと，θ_1 を小さくするために，L, v, m のそれぞれ１つずつを変更する場合は，次のようにすればよい。

・L は オ {(a) 長くする，(b) 短くする，(c) 無関係である}。

・v は カ {(a) 大きくする，(b) 小さくする，(c) 無関係である}。

・m は M に対し， キ {(a) 大きくする，(b) 小さくする，(c) 無関係である}。

この条件下で，$T = \boxed{\text{ク}}$ とすると，装置は点Oに来るたびにボールを打ち出すことになる。

（3） 時刻 $t = T = \boxed{\text{ク}}$ に2個目のボールが x 軸の負の向きに打ち出された。装置から見たボールの打ち出しの速度は1回目と変わらないため，床の上から観測したボールの速度を v と V_1 を用いて表すと $\boxed{\text{ケ}}$ となる。

ボールを打ち出した直後の装置の速度 V_2 は次のように書ける。

$$V_2 = V_1 \times \frac{m}{\boxed{\text{コ}}}$$

以下では，$M = 1.0\,\mathrm{kg}$，$m = 0.10\,\mathrm{kg}$，$v = 4.0 \times 10^1\,\mathrm{m/s}$ とする。

問1　V_1，V_2 を有効数字2桁で求めよ。

装置は点Oでボールを打ち出した直後の速さに比例した距離だけ点Oから x 軸上を進む。

問2　時刻 $t = 0$ から $t = 2T$ までの装置の x 座標のグラフを解答欄に描け。ただし，この間の最大変位の大きさを x_1 とする。

k（$k = 3, 4$）個目のボールを打ち出した直後の装置の速度 V_k は次のようになる。

$$V_k = \frac{mv}{M - km} - V_{k-1}$$

問3　$T \leqq t \leqq 4T$ での装置の運動を表したグラフを図2の(a)〜(i)から1つ選び記号を答えよ。

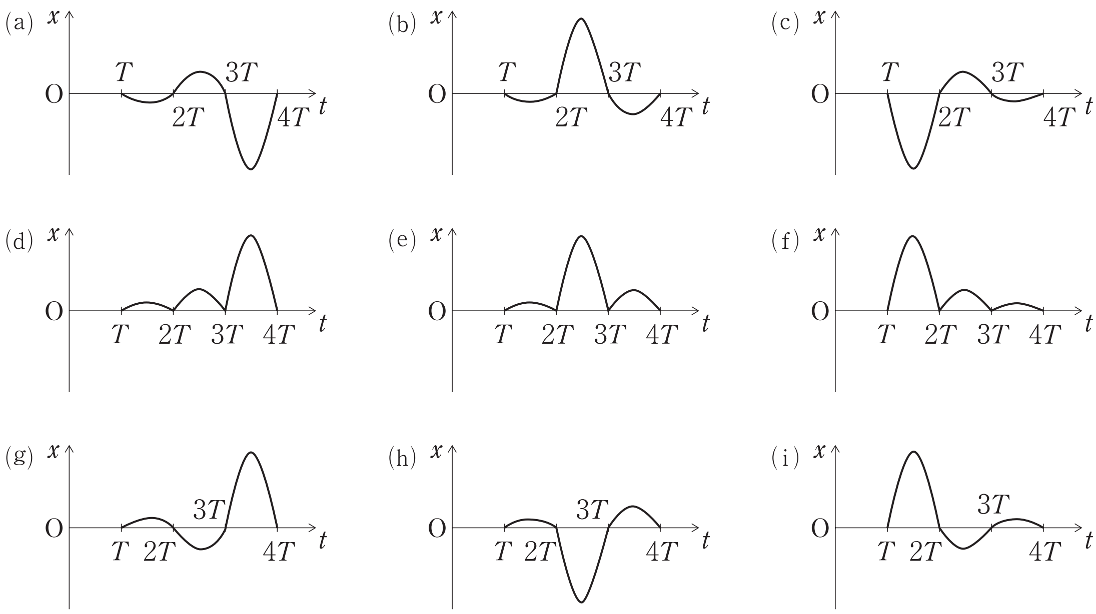

図2

Ⅱ 問いに答えよ。(配点 45)

(1) 外出先でスマートフォンのバッテリーが切れたとき，モバイルバッテリーを使って充電することもあるだろう（図1）。この充電の効率を簡単なモデルで考えてみよう。

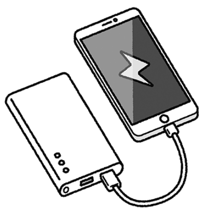

図1 モバイルバッテリーとスマートフォン

以下ではモバイルバッテリーとスマートフォンのバッテリーを，それぞれコンデンサーとみなして，それらの充電過程を図2のような電気回路で考えてみる。回路には，コンデンサー1（モバイルバッテリー）とコンデンサー2（スマートフォンのバッテリー）以外に，起電力 V の直流電源，抵抗1と抵抗2，およびスイッチ SW1，SW2 が接続されている。コンデンサー1の電気容量を C，コンデンサー2の電気容量を $\frac{1}{2}C$ とする。はじめ2つのスイッチは開いており，両方のコンデンサーは電荷を蓄えていないとする。

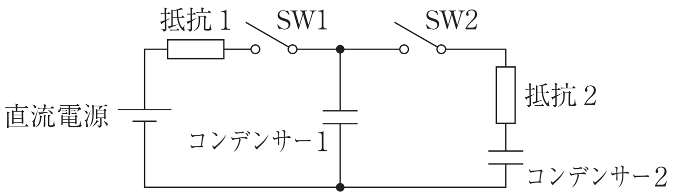

図2 電気回路

まず SW1 を閉じた後，十分な時間が経過して，コンデンサー1が充電された。この状態はモバイルバッテリーが完全に充電された状態に対応する。

問1 コンデンサー1に蓄えられる電気量を求めよ。

問2 このとき，コンデンサー1に蓄えられる静電エネルギーを求めよ。

次に，SW1 を開き，SW2 を閉じて十分に時間が経過した。

問3 コンデンサー2の両端の電圧を求めよ。

問4 コンデンサー2に蓄えられる静電エネルギーは，問2で求めた静電エネルギーの何%になるかを，有効数字2桁で答えよ。

問5 コンデンサー1，コンデンサー2にそれぞれ蓄えられる静電エネルギーの和が，問2の静電エネルギーに一致しない理由を答えよ。

実際には，モバイルバッテリーは電気エネルギーを化学エネルギーなどに変換することで長時間一定の起電力を保つ性質を持っており，コンデンサーと単純に置き換えられない。しかし，このようなモデル化で現実と同様な電力損失を示すことができた。

（2） 図3に示すような真空中に置かれた平行板コンデンサーを考える。

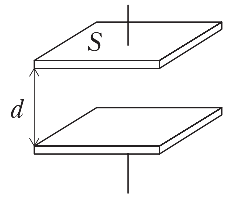

図3　平行板コンデンサー

コンデンサーの極板の面積を S，極板間の距離を d，真空の誘電率を ε_0 とすると，この平行板コンデンサーの電気容量 C_0 は次の式で与えられる。

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

このコンデンサーの極板間に，以下の方法で，同じ体積であるが形の違う2種類の直方体のアクリル板を配置する。アクリル板の比誘電率を4とする。

挿入方法1：図4のように，極板と同じ底面積 S で高さが xd（$0 \leqq x \leqq 1$）のアクリル板を，下側の極板に一致するように入れる。

挿入方法2：図5のように，極板間の距離 d と同じ高さで底面積が xS（$0 \leqq x \leqq 1$）のアクリル板を，極板の左側に一致するように入れる。

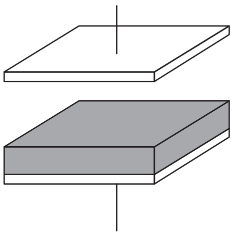

図4　挿入方法1

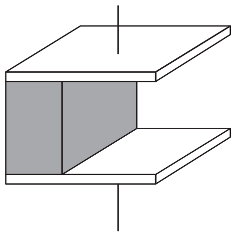

図5　挿入方法2

問6　挿入方法1でアクリル板を挿入したときのコンデンサーの電気容量 C_1 を，x と C_0 を用いて表せ。

問7　挿入方法2でアクリル板を挿入したときのコンデンサーの電気容量 C_2 を，x と C_0 を用いて表せ。

問8　電気容量 C_1 と C_2 を x の関数として考える。$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲の C_1 と C_2 のグラフを解答欄の図に描け。C_1 を実線（――），C_2 を破線（-----）で描くこと。また，x が $\frac{1}{2}$ のときの C_1 と C_2 の値を図中に記入せよ。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$ 空所を埋め，問いに答えよ。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は{　　}の選択肢から適切なものを選んで答えよ。(配点 45)

（1） シャボン玉の大きさを決めるのは，内側と外側にある空気の圧力による膜を押す力と，膜の分子間力による表面張力のつりあいである。

表面張力は「表面の単位長さ部分を，それに直交する向きに引き伸ばす力」であり，〔力/長さ〕の次元をもつ量である。表面張力は，シャボン玉の膜を内側へ押す力としてはたらく（図１）ので，シャボン玉の大きさが一定のとき，内側の空気の圧力は外側よりも $\boxed{\text{ア}}$ {大きい・小さい}。

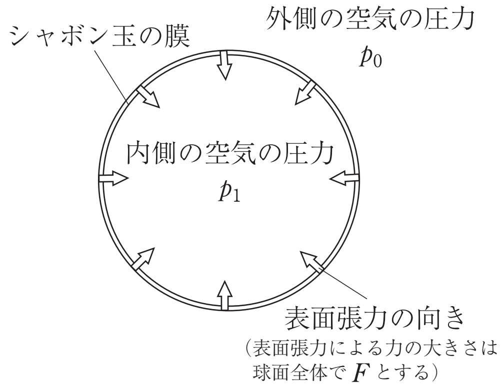

図１

シャボン玉が半径 R の球の状態であるとして，膜の厚さは無視できるほど薄いとする。また，重力の影響も無視する。外側の空気の圧力を p_0，内側の空気の圧力を p_1 とする。表面張力によって生じる力の大きさを球面全体で F とする。シャボン玉の球面の法線方向にはたらく力のつりあいの式を表すと

$$4\pi R^2 p_0 + F = \boxed{\text{イ}}$$

となる。

F は，シャボン玉の半径 R に比例し，定数 α を用いて，$F = 8\pi\alpha R$ とする。

問１ $\alpha = 0.025\ \mathrm{N/m}$ となる石けん水の場合で，$R = 0.10\ \mathrm{m}$ のシャボン玉の内側と外側の圧力差 Δp（$= p_1 - p_0$）はいくらか。Pa の単位で答えよ。

実際のシャボン玉の形状を考える際には，重力の影響も考える必要がある。石けん水の場合，膜が球の形状を維持できる最大値があり，膜の厚さを d とすると，$R \cdot d \leqq 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$ となることが知られている。シャボン玉の膜の厚さと半径がこの条件をみたすとして，次にシャボン玉の反射光がどう見えるのかを考えていこう。

（2） 薄膜によって生じる光の干渉を考えよう。

図２のように，屈折率 n，厚さ d の平面状の薄膜に対して白色光が入射する。薄膜の上と下は空気であり，空気の屈折率を１，また，$n > 1$ とし，薄膜の厚さは一定とする。点Ａから入射し，点Ｂで反射して，点Ｃから出る光を光①とする。点Ｃで入射して反射する光を光②とする。遠方の同じ光源から平面波として届く光①と光②（図の点Ａと点Ｅ，および点Ｄと点Ｃで同じ波面となる）が強めあう条件を導こう。

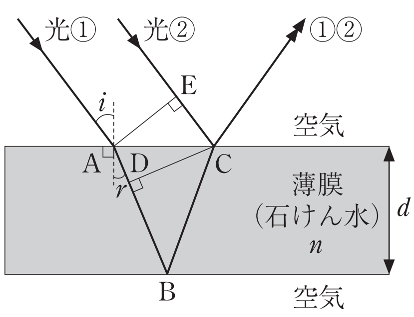

図２

空気中で波長 λ の光が入射する場合を考える。光①の薄膜中での波長は $\boxed{\quad ウ \quad}$ である。入射角 i と屈折角 r の間には，$\sin i = \boxed{\quad エ \quad}$ の関係がある。また，点Bと点Cでの反射で生じる光①と光②の位相は，$\boxed{オ}$ {同じである・$\pi/2$ ずれる・π ずれる}。そのため，光①と光②の光路差を L とすると，２つの光が強めあう条件は，干渉の次数を m（$m = 0, 1, 2, \cdots$）として，

$$L = \left(\boxed{\quad カ \quad} \right) \times \lambda$$

となる。

光①と光②の光路差 L は，経路差が図のDBCの長さであるから，$L = 2nd\cos r$ である。

問２　光が薄膜に垂直に入射するとき（$i = 0$ のとき），反射光の干渉によって強め合う光の波長 λ を n, m, d を用いて表せ。

以下でも，光が薄膜に垂直に入射するときを考える。また，屈折率は $n = 1.3$ で，この値は光の波長によらないものとする。

表１

色	波長（$\times 10^{-7}$ m）
赤	6.1〜7.7
燈	5.9〜6.1
黄	5.6〜5.9
緑	5.0〜5.6
青	4.6〜5.0
藍	4.3〜4.6
紫	3.8〜4.3

問３　薄膜の厚さが $d = 1.0 \times 10^{-7}$ m のとき，強めあう反射光の色は何か。表１の分類を参照して答えよ。

問４　薄膜の厚さが $d = 1.0 \times 10^{-5}$ m のとき，薄膜は色づいて見えない。その理由を説明せよ。

一定量の石けん水でできたシャボン玉が膨張すると，その薄膜の厚さ d は半径 R の関数として $\boxed{キ}$ {R^2 に比例する・R に比例する・一定である・R^{-1} に比例する・R^{-2} に比例する}。したがって，シャボン玉を膨らませていく過程で，反射光の色合いが変化していくことが上記の計算によって説明できる。