一般入試前期A日程1日目

数　学

I

【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1)　3 次方程式 $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，

$\omega^2 + \omega = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\omega^2 - \dfrac{5}{\omega^2}$ の実部の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　実数 θ が $\pi < \theta < 2\pi$ かつ $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，

$\cos\left(\theta + \dfrac{3}{2}\pi\right) = \boxed{\text{ウ}}$ であり，$\sin 2\theta = \boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　a, b を実数とする。$\log_6 a + \log_6(a+1) = 1$ であるとき，$a = \boxed{\text{オ}}$ である。

また，$\log_2|b| + \log_{\frac{1}{2}}(b+1) = 1$ であるとき，$b = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　整数 m, n が $0 < m < n$ かつ $mn - 4m - 4n = 13$ を満たすとする。

このとき，$n = \boxed{\text{キ}}$ であり，$mx + ny = 1$ となる整数の組 (x, y) のうち，

$0 < x < 300$ を満たすものは全部で $\boxed{\text{ク}}$ 組ある。

$\boxed{\text{II}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。　（配点 30）

(1) 鋭角三角形 OAB について，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4$ とし，△OAB の面積は $2\sqrt{5}$ とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \boxed{\text{イ}}$ である。

また，点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(\,s \geqq 0\,,\ t \geqq 0\,,\ 1 \leqq s + t \leqq 3\,)$ を満たしながら

動くとき，点 P が動く領域の面積 S は，$S = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) n を自然数とし，整式 $(x-1)^n$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

ただし，$a_n,\ b_n$ は x を含まない数とする。

このとき，$a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ a_2 = \boxed{\text{エ}}$，$b_2 = 0$ である。

また，$a_{n+1},\ b_{n+1}$ はそれぞれ $a_n,\ b_n$ を用いて

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = p\,a_n + q\,b_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と表すことができる。このとき，p の値は，$p = \boxed{\text{オ}}$ である。ただし，$p,\ q$ は

n を含まない定数とする。したがって，$a_{2021} + a_{2022} + a_{2023} = \boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = x\sin 2x + \cos^2 x$ に対して，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4) 関数 $g(x)$ が $g(x) = f(x) + x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt$ を満たすとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{Ⅳ}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x)=\log(2x)\ \ (x>0)$ について，

曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\big(a,\ \log(2a)\big)$, $\mathrm{Q}\big(a+h,\ \log\big(2(a+h)\big)\big)$ における

法線をそれぞれ l_{P}, l_{Q} とする。ただし，$a>0$, $a+h>0$, $h \fallingdotseq 0$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) 微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

(2) l_{P}, l_{Q} の方程式を求めよ。

(3) l_{P} と l_{Q} の交点を R とし，その座標を $(x_{\mathrm{R}},\ y_{\mathrm{R}})$ とする。

このとき，極限値 $A=\lim_{h\to 0} x_{\mathrm{R}}$ および $B=\lim_{h\to 0} y_{\mathrm{R}}$ を求めよ。

(4) (3) で求めた B に対して，B が最大となるときの a の値を求めよ。

ただし，最大値は求めなくてよい。

$\boxed{\mathrm{V}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) 平面上の四角形 ABCD が，$\mathrm{AC}=1,\ \angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4},\ \angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2},$

$\angle\,\mathrm{BAC}=\angle\,\mathrm{CAD}=\theta$ を満たすとする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

このとき，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=\boxed{\text{ア}}$ であり，$\mathrm{BC}+\mathrm{AD}$ のとり得る値の最大値 M は，

$M=\boxed{\text{イ}}$ である。

また，$\mathrm{BC}+\mathrm{AD}$ が最大値 M をとるとき，

$\sin\theta=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は，$S=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) n を 2 以上の自然数とする。赤玉 20 個，白玉 20 個，青玉 40 個が入っている袋から 1 個の玉を取り出して色を調べてから袋に戻す試行を n 回繰り返す。

(i) $n=3$ のとき，3 回とも青玉が取り出される確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) n 回とも赤玉が取り出される確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) n 回のうち，1 回以上青玉が取り出される確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(iv) n 回のうち，赤玉と白玉がどちらも 1 回以上取り出される確率は

$1-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{4^n}$ である。

Ⅵ 【数学 ② のみ解答】

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 2 + 2\int_0^1 f(t)\,dt\ ,$$
$$g(x) = x - \int_0^1 |g(t)|\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) $\displaystyle\int_0^x (3t^2 - 2t - 2)\,dt$ を求めよ。

(2) $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくとき，I の値を求めよ。また，$f(x)$ を求めよ。

(3) $g(x)$ を求めよ。

(4) $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - 2g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。