一般入試前期Ａ日程２日目

数　学

I

【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1)　a, b を正の実数とする。

$(x-a+1)(x-a)(x-a-1) = x^3 - 3ax^2 + bx - 8a$ が x についての恒等式となるとき，$a = \boxed{\text{ア}}$ であり，$b = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　不等式 $\log_2(x-2) > 1$ を満たす x の値の範囲は，$x > \boxed{\text{ウ}}$ である。

これとは別に，実数 x, y が 2 つの式 $2^y = x+1$ かつ $y = 1 + 2\log_2(x-2)$ を満たすとき，$x = \boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　$\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\sin^2 2x}$ である。ただし，$\boxed{\text{オ}}$ は x を含まない数である。

また，実数 θ が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ かつ $\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta} + 1 = \dfrac{2}{\sin\theta\cos\theta}$ を満たすとき，

$\tan\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　$\triangle\mathrm{OAB}$ について，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 6$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 7$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \dfrac{21}{2}$ とする。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \boxed{\text{キ}}$ である。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の内接円の中心を I とし，

$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0 < s < 1,\ 0 < t < 1)$ と表すとき，$t = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{Ⅱ}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 30）

(1) 自然数 n に対して，整式 x^3+10nx^2-x-3 を $x-2$ で割った余りを a_n とし，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を作る。このとき，一般項は $a_n=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 1 次不定方程式 $9x+5y=2$ のすべての整数解は

$$x=\boxed{\text{イ}}\,k-2\,,\ \ y=-9k+\boxed{\text{ウ}}\qquad (k\text{ は整数})$$

と表される。ただし，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ は k を含まない定数とする。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項が $b_n=\boxed{\text{イ}}\,n-2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であるとき，$S_n=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}b_m=\frac{\boxed{\text{エ}}}{2}$ より，$S_n>160$ となる最小の自然数 n の値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) (1), (3) で定めた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，a_n と b_n の最大公約数を c_n $(n=1,2,3,\cdots)$ とする。このとき，c_n の値は，1 または $\boxed{\text{カ}}$ である。

Ⅲ 【数学 ① のみ解答】

$b>0$ とする。座標平面上の曲線 $C:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は 2 点 $(0,\,\sqrt{3})$，$(0,\,-\sqrt{3})$ からの距離の和が $2\sqrt{5}$ となる点の軌跡として表される楕円であるとする。

このとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) 定数 b の値を求めよ。

(2) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおいて，置換積分法を用いて，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx$ の値を求めよ。

(3) $k>0$ とする。直線 $y=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}x+k$ が曲線 C の接線となるとき，k の値と接点の x 座標を求めよ。

(4) (3) で求めた接点の x 座標を p とする。曲線 C で囲まれた図形を A とするとき，直線 $x=p$ は A を 2 つの図形に分ける。2 つの図形の面積をそれぞれ S_1, S_2 $(S_1>S_2)$ とするとき，S_1-S_2 を求めよ。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,x-t\,| \cos t \, dt \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) 不定積分 $\int t \cos t \, dt$ を計算せよ。

(2) $\frac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ のとき，$f(x)$ を計算せよ。

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ を計算せよ。

(4) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

V 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) 円 $C : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$ の中心 A の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \right)$ であり，半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。$m > 0$ として，円 C が直線 $l : y = mx$ から切り取る線分の長さが 6 であるとき，$m = \boxed{\text{エ}}$ であり，点 A を通り直線 l に垂直な直線の方程式は $y = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) (i) 袋が 3 つある。また，1, 2, 3 のいずれか 1 つの数字が書かれた 3 個のボールがある。それぞれの数字が書かれたボールは 1 つずつである。この 3 個のボールをそれぞれ 3 つの袋のいずれかに入れる。ただし，ボールが入らない袋があってもよい。

袋を区別するとき，入れ方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通りあり，

袋を区別しないとき，入れ方は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。

(ii) 箱が 3 つある。また，n を 2 以上の整数とし，1 から n までのいずれか 1 つの番号が書かれた n 枚のカードがある。それぞれの番号が書かれたカードは 1 枚ずつである。この n 枚のカードをそれぞれ 3 つの箱のいずれかに入れる。ただし，箱は区別しないこととし，カードが入らない箱があってもよいとする。

このとき，2 つ以上の箱にカードが入るような入れ方は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。

したがって，カードの入れ方は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 通りある。

$\boxed{\text{VI}}$ **【数学 ② のみ解答】**

a を実数とし，$f(x)=\left(a+\dfrac{2}{3}\right)x^3+x^2-3ax$ とする。
このとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f'(x)=0$ の異なる実数解の個数を a の値で場合分けして求めよ。

(3) $-\dfrac{2}{3}<a<-\dfrac{1}{3}$ とする。$f(x)$ の増減を調べて，$f(x)$ が極大となるときの x の値を求めよ。ただし，極大値は求めなくてよい。

(4) $a=-\dfrac{2}{3}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ $(x \geqq 0)$ と直線 $y=2x+3$ および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。