物　理

Ⅰ　問いに答えよ。（配点 60）

チャーハンの皿に残った米粒をスプーンや蓮華（れんげ）でうまくすくえずに，困った経験をした人は多いと思う。以下では簡略化したモデルを用いてこの現象を考える。米粒の質量を m，重力加速度の大きさを g とする。

（1）　図1のように水平に置かれた平らな皿の上に米粒が静止している。はじめの米粒の位置を原点Oとし，水平右向きに x 軸をとる。米粒にスプーンで右向きに力を加え続けると，米粒は大きさ a の一定の加速度で x 軸方向に動き，皿の端まで距離 d を進んだ。米粒の大きさは無視し，皿と米粒の間に摩擦力がはたらかない場合を考える。

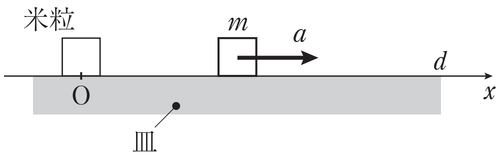

図1

問1　スプーンが米粒を押す力の大きさを求めよ。

問2　皿の端に到達したときの米粒の速さを求めよ。

次に皿と米粒の間に摩擦力がはたらく場合を考える。動摩擦係数を μ とし，同じようにスプーンで米粒を大きさ a の一定の加速度で右向きに動かす。

問3　米粒が動いているときの摩擦力の大きさを求めよ。

問4　原点Oから皿の端まで進む間にスプーンが米粒にした仕事を求めよ。

問5　問4の仕事のすべてが米粒の運動エネルギーになるわけではない。それらはどのようなエネルギーの形態になると考えられるか。具体的に**1つ**あげよ。

（2）　米粒の大きさを考慮してスプーンですくうことを考える。簡単のために米粒は一辺の長さが $2b$ の立方体で，変形しないとする。図2は米粒の重心Gを通る断面である。スプーンを米粒の左側の面に皿からの高さ h の点Aに当て，水平右向きに力を加えて加速度が一定の大きさ a になるように動かす。以下では，スプーンと一緒に右向きに加速しながら観測するものとし，観測者の座標として図2のように X 軸と Y 軸をとる。このとき，原点Oは皿に対して大きさ a の加速度で動いている。米粒の各部分に慣性力がはたらくが，それらは重心Gを始点として X 軸の負の向きを向いた大きさ ma のベクトルに合成される。同様に皿から米粒の底面の各部分にはたらく垂直抗力と摩擦力も，それぞれ合成することができ，どちらも力の始点の座標値を（c，0）とする。

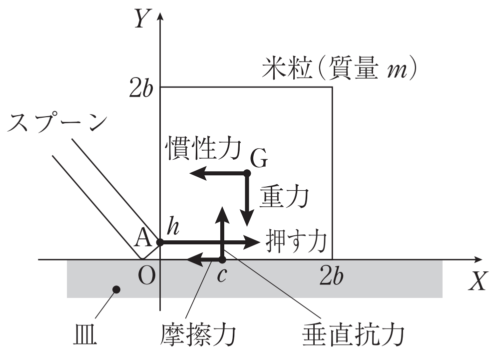

図2

問6　Y 軸方向の力のつり合いより，皿から米粒にはたらく垂直抗力の大きさを求めよ。

問７　図２のとき，米粒にはたらく点Ａのまわりの力のモーメントを考える。力のモーメントのつり合いの式は

$$\boxed{\text{ア}} + mgc - mgb - \mu mgh = 0 \qquad ①$$

となる。左辺の各項は左から，それぞれ慣性力，垂直抗力，重力，摩擦力のモーメントである。 $\boxed{\text{ア}}$ を埋めよ。

式①は c を求める式である。$c < 0$ になる場合は力のモーメントがつり合わず，米粒は点Ａのまわりに回転してスプーンの上に乗る。

問８　解答欄にある縦軸 a，横軸 h のグラフに $c = 0$ の場合の曲線を描いた。米粒がスプーンに乗る領域（$c < 0$）を斜線で示せ。

問９　$h < b$ のとき，米粒がスプーンに乗る条件は $a >$ $\boxed{\text{イ}}$ となる。 $\boxed{\text{イ}}$ を埋めよ。

問10　米粒の高さ $2b$ を 3.0 mm，スプーンが接する高さ h を 1.0 mm，動摩擦係数 μ を 0.50，スプーンを皿の端まで動かす距離 d を 20.0 cm，重力加速度の大きさ g を 9.8 m/s^2 とする。$a =$ $\boxed{\text{イ}}$ のとき，皿の端での皿に対するスプーンの速さを求めよ。

次に図３のように皿を水平面から角度 θ（$0° < \theta < 45°$）で傾け，X 軸方向に力を加えて米粒を大きさ a の一定の加速度で押し上げる。

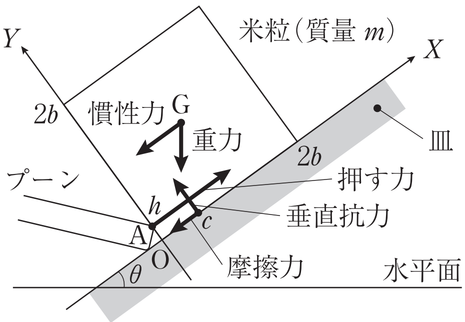

図３

問11　点Ａのまわりの力のモーメントに関して，つり合いの式は

$$\boxed{\text{ア}} + mgc \times \boxed{\text{ウ}} - mg\{b\cos\theta - (b - h)\sin\theta\} - \mu mgh \times \boxed{\text{ウ}} = 0$$

となる。 $\boxed{\text{ウ}}$ を埋めよ。

これより米粒がスプーンに乗る条件は $a > \dfrac{g\{(b + \mu h) \times \boxed{\text{ウ}} - (b - h)\sin\theta\}}{b - h}$ と求まる。

問12　以上の考察から，最後に残った米粒をすくうにはどのようにすれば良いか。次の(a)～(c)について選択肢から選び，記号で答えよ。

(a)　スプーンの加速度の大きさを{ア．大きく　イ．小さく}し，

(b)　スプーンが米粒に接する位置を{ア．高く　イ．低く}して，

(c)　皿の傾きを{ア．大きく　イ．小さく}すれば良い。

Ⅱ　問いに答え，空所を埋めよ。（配点 45）

電荷をもつ粒子を加速する装置は加速器とよばれる。加速器の一つであるベータトロンの概要を以下に説明する。図1のようにドーナツ状の細い管を用意し，その中心を点Oとする。管の内部は真空である。管の上下に電磁石を設置し，管で囲まれる平面を垂直に貫く磁場（磁界）を与える。磁場は位置と時間に関して変化するが，管で囲まれた平面上において点Oから等しい距離では同じとする。管内で管に沿う向きに電子を入射すると，電子は磁場により点Oを中心とする半径 r の円運動（点線の軌道）を行う。ここで電子が運動する平面と磁場は垂直である。このとき磁場の強さを調節することで，電子を半径が一定のまま円周方向に加速させることができる。そのしくみを考察しよう。

電子の質量を m，電気量を $-e$ とする。磁場は図1の上向きの矢印の向きを正とする。重力の影響は無視する。

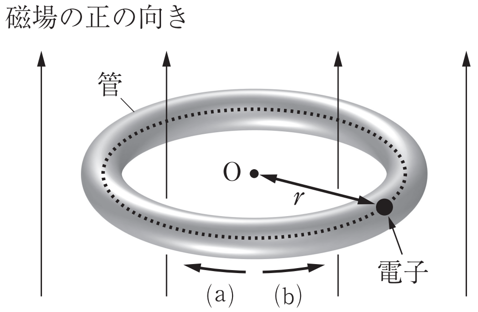

図1　ベータトロン

図1において磁場が上向きであり，点Oから半径 r の位置での磁束密度の大きさが B であるとき，電子は半径 r の円運動をした。

問1　電子の速さを求めよ。また電子の運動の向きを図1の(a), (b)の矢印から1つ選び，その記号を答えよ。

問2　電子が問1の状態で管を一周するとき，ローレンツ力が電子にする仕事を求めよ。

電磁石による磁場の強さを時間的に変えることで半径 r の円の内部を貫く磁束 Φ が変化すると，その変化を妨げるように円周方向に誘導起電力が発生する。誘導起電力が生じる原因は，電場（電界）が円周方向に作られるためであり，この電場は誘導電場とよばれる。

ここで磁束 Φ が正であり，微小時間 Δt の間に $\Delta\Phi$ だけ増加している場合を考える（$\Delta\Phi > 0$）。誘導起電力の大きさは一周あたり $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ である。半径 r における誘導電場の大きさは，円周の長さを考慮して $\boxed{\quad ア \quad} \times \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ となる。

問3　誘導電場の向きを図1の(a), (b)の矢印から1つ選び，その記号を答えよ。

誘導電場により電子には円周方向に加速度が生じ，運動エネルギーが増加する。以下では誘導電場のはたらきに注目して考える。

問 4　電子が管を一周したときの運動エネルギーの増加量を求めよ。

誘導電場から生じる電気力によって電子は力積を受け，運動量が変化する。この電気力は微小時間 $\varDelta t$ の間は一定とする。

問 5　力積と運動量の関係を用いて $\varDelta t$ の間に生じる電子の運動量の大きさの増加量 $\varDelta p$ を求めよ。ただし $\varDelta t$ を含めない式とする。

ここで電子を半径 r の円軌道を保ちながら速くするために，磁束密度を点 O からの距離に応じて調節する。その条件を考えよう。半径 r の軌道上における磁束密度（大きさ B）について，微小時間 $\varDelta t$ の間における増加量を $\varDelta B$ とする。

問 6　問 1 の結果を用いて，$\varDelta t$ の間に生じる電子の運動量の大きさの増加量 $\varDelta p$ を，$\varDelta B$ を含む式で表せ。

ある時刻での半径 r の円の内部を貫く磁束密度の大きさの平均値を B_0 とすると $B_0 = \dfrac{\varPhi}{\pi r^2}$ である。微小時間 $\varDelta t$ の間における B_0 の増加量を $\varDelta B_0$ とする。問 5 と問 6 から得られる $\varDelta p$ が一致する条件より，$\varDelta B$ と $\varDelta B_0$ には以下の関係が成り立つ。

$$2\varDelta B = \varDelta B_0 \qquad ①$$

問 7　式①を導出せよ。

式①より，半径 r の円周における磁束密度の時間に関する変化は，円の内部を貫く磁束密度の平均値の変化に対して $\boxed{\quad イ \quad}$ 倍になるように調節を行えばよい。式①をみたしながら時間とともに磁束密度を強めることで，電子を半径が一定のまま円周方向に加速させることができる。

実際は交流電源を電磁石に接続して磁束密度を周期的に変化させる。このとき，電子にはたらくローレンツ力と電気力の向きのため，磁束密度が 1 周期変化する間に電子を速くできる時間は限られる。この限られた時間内に電子を管に入射し，速くさせた後，管に設けられた取り出し口から電子を取り出す。磁束密度の周期にあわせてこの過程をくり返す。

図 1 のベータトロンにて磁束密度が正弦波で時間変化し，問 1 で選んだ運動の向きに管内で電子を速くさせる場合を考える。

問 8　解答欄に半径 r での磁束密度が，横軸を時刻 t として点線の波形で描いてある。電子を速くすることが可能な時間帯をすべて選び，該当する部分の波形を実線でなぞれ。

$\boxed{\text{III}}$ 空所を埋め，問いに答えよ。$\boxed{イ}$ は選択肢{　　}の中から適切なものを選べ。空気の絶対屈折率を 1 とする。(配点 45)

（1） 光が異なる物質に進むとき，境界面で反射や屈折を起こす。図 1 は，空気から物質Ⅰへ光が入射する様子を示す。入射角を i，屈折角を r とすると，物質Ⅰの絶対屈折率は $\boxed{\quad ア \quad}$ と表される。図 2 は，物質Ⅱから物質Ⅲへ光が入射し，反射光と屈折光が生じる様子を示す。物質Ⅱと物質Ⅲの絶対屈折率を，それぞれ n_{II} と n_{III} と表し，$n_{\text{II}} > n_{\text{III}}$ とする。図 2 の場合，入射角がある条件をみたすと全反射が生じる。全反射を生じさせるためには，入射角をより $\boxed{イ}$ {大きく，小さく}する必要がある。

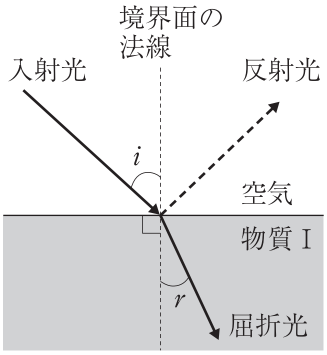

図 1

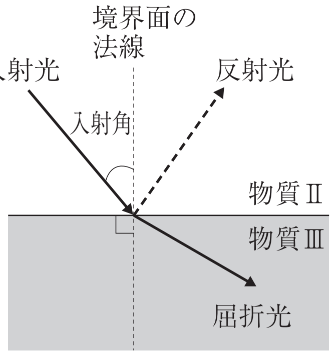

図 2

問 1　図 2 の境界面において，以下の物質の組み合わせの中で全反射の臨界角が最小になるものを選び記号で答えよ。ただし，水とガラスの絶対屈折率を，それぞれ 1.3 と 1.5 とする。

(a)　物質Ⅱ：ガラス　　物質Ⅲ：水

(b)　物質Ⅱ：水　　　　物質Ⅲ：空気

(c)　物質Ⅱ：ガラス　　物質Ⅲ：空気

（2） 単色光がプリズムを通過する様子を考えよう。図 3 に示すように，辺 OX と辺 OY の長さが等しい二等辺三角形の断面をもったプリズムが空気中に置かれている。プリズム内の光の吸収や各境界面での光の反射は無視する。光は紙面に沿って進む。辺 OX と辺 OY のなす角を頂角と呼び，α とする。太い実線は光の経路を示し，A と B は，それぞれ光の入射位置と出射位置を示す。θ_1 と ϕ_1 は，それぞれ A での光の入射角と屈折角であり，ϕ_2 と θ_2 は，それぞれ B での入射角と屈折角である。C は，入射光線および透過光線をそのまま延長した場合の交点である。入射光線と透過光線のなす角を偏角と呼び，δ とする。δ は，γ_1 と γ_2 を用いて $\boxed{\quad ウ \quad}$ と表される。D は，A と B における法線の交点であり，2 つの法線のなす角を β とする。四角形 OADB の内角の和を考えると，$\alpha = 180° - \beta$ である。また，三角形 ADB の内角の和を考えて β を消去すると，α は ϕ_1 と ϕ_2 を用いて $\boxed{\quad エ \quad}$ と表される。$\alpha = \boxed{\quad エ \quad}$，$\gamma_1 = \theta_1 - \phi_1$，$\gamma_2 = \theta_2 - \phi_2$ の関係から，δ は，θ_1，θ_2，α を用いて $\boxed{\quad オ \quad}$ と表される。

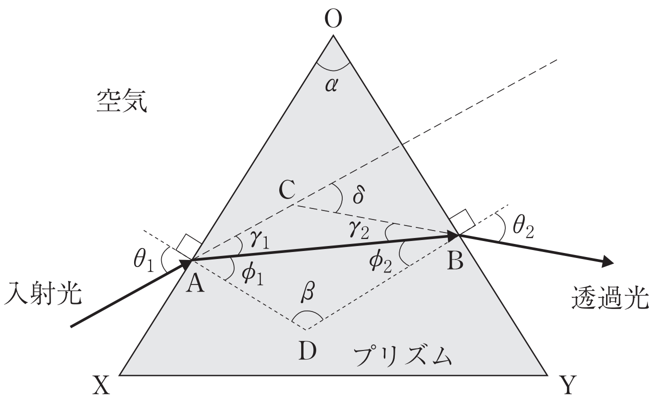

図 3

θ_1 を変化させていくと，ある角度で δ が最小になる。このときの δ を最小偏角と呼び，δ_m とする。最小偏角が得られるとき，θ_1 と θ_2 は等しくなる。

問 2　δ が最小のとき，光がプリズムに入射してから透過するまでの経路を解答欄の図に記入せよ。

$\theta_1 = \theta_2$ の関係と屈折の法則から，プリズムの絶対屈折率 n は，α と δ_m を用いて，

$$n = \frac{\sin \boxed{\text{カ}}}{\sin \boxed{\text{キ}}} \qquad ①$$

と表される。式①より，頂角と最小偏角を測定すると，物質の屈折率を求めることができる。

問 3　α が $60°$ のプリズムにおいて，δ_m が $50°$ であった。このプリズムの絶対屈折率を求めよ。ただし，$\sin 55° = 0.82$ として計算せよ。