一般入試後期D日程

物　理

I　空所を埋め，問いに答えよ。（配点 60）

図1のように，水平な地面から，地面とのなす角 θ（$0° < \theta < 90°$）の向きに，速さ v_0 で質量 m の小球を投射した。小球を投射した地点を原点Oとし，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，小球を投射した時刻を $t = 0$ とする。小球は xy 平面内を運動する（図中の破線の軌道）とし，小球の大きさや空気抵抗は無視できるとする。重力加速度の大きさを g とする。

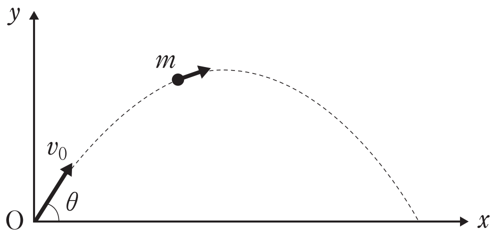

図1

（1）　小球が地面に落下するまでの運動を考える。

問1　時刻 t における小球の位置の x 座標と y 座標を t, v_0, θ, g を用いて表せ。

問2　小球の最高点の y 座標 Y_1 を，v_0, θ, g を用いて表せ。

問3　小球が投射されてから地面に落下するまでの時間 T_1 を，v_0, θ, g を用いて表せ。

問4　小球が地面に落下したときの x 座標 X_1 を，v_0, θ, g を用いて表せ。

（2）　小球が投射された瞬間の速さ v_0 と投射角 θ を精密に測定するためには，高精度の機器がなければ難しい。しかし，小球が投射されてから地面に落下するまでの時間 T_1 とその水平距離 X_1 は，容易に測定することができる。そこで v_0 と θ を，X_1 と T_1 で表すことを考えよう。まず $\dfrac{T_1{}^2}{X_1}$ を計算すると，$\tan\theta$ が g, X_1, T_1 を用いて

$$\tan\theta = \boxed{\quad ア \quad} \qquad ①$$

と表せる。①式を使うと，v_0 も g, X_1, T_1 を用いて次の②式のように表せる。

$$v_0 = \sqrt{\frac{X_1{}^2}{T_1{}^2} + \frac{g^2 T_1{}^2}{4}} \qquad ②$$

問5　②式を導出せよ。

次に，v_0 と θ の値を調節して，座標位置 $x = L$, $y = 0$（L は正の定数）に小球を落下させるための条件を調べよう。②式で $X_1 = L$ とおけば，v_0 は T_1 のみで定まる。

小球が $x = L$ まで届くためには，v_0 をある値 v_m より大きくする必要がある。②式に相加・相乗平均の関係式 $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$（a, b は正の実数で，等号成立は $a = b$ のとき）を用いると，v_m の値と，$v_0 = v_\mathrm{m}$ となるときの T_1 の値 T_m は，g, L を用いてそれぞれ $v_\mathrm{m} = \boxed{\quad イ \quad}$，$T_\mathrm{m} = \boxed{\quad ウ \quad}$ となる。$\boxed{\quad ウ \quad}$ を①式に代入すると，$v_0 = v_\mathrm{m}$ のときの投射角 θ_m が $\theta_\mathrm{m} = \boxed{\quad エ \quad}$ と求まる。

問6　$T_1 \to 0$ と T_1 が十分大きいときの v_0 と T_1 の関係に着目し，横軸を T_1，縦軸を v_0 としたグラフの概形を解答欄に示せ。解答欄の図には，点（T_m, v_m）と直線 $v_0 = \dfrac{1}{2} gT_1$ が示してある。

（3） 図2のように，投射された小球は，その後地面と繰り返し衝突をした。地面はなめらかとし，小球と地面との反発係数（はね返り係数）を e（$0 < e < 1$）とする。

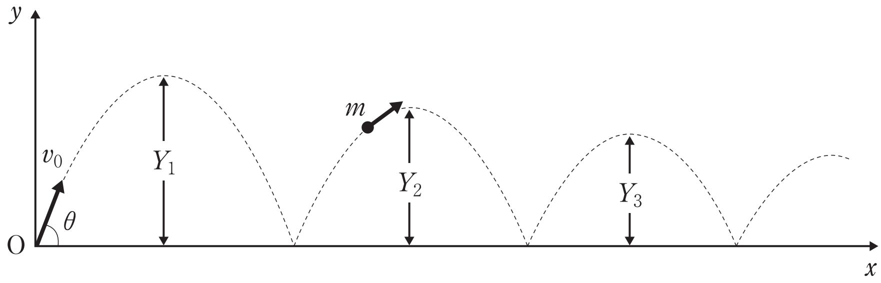

図2

地面はなめらかであるので，小球の速度の x 成分は衝突の前後で変化しない。一方，小球は鉛直方向に地面から力積を受けるので，速度の y 成分は変化する。1回目の衝突直後の速度の y 成分を e，v_0，θ を用いて表すと，$\boxed{\text{オ}}$ となる。

小球が投射されてから1回目に衝突するまでの時間を T_1，$0 < t < T_1$ における小球の最高点の y 座標を Y_1 とする。同様にして，小球が（$n - 1$）回目（n は2以上の自然数）に衝突してから n 回目に衝突するまでの時間を T_n，（$n - 1$）回目の衝突後の小球の最高点の y 座標を Y_n とする。

T_2 は，速さ $\boxed{\text{オ}}$ で鉛直に投げ上げられた小球が地面に落下するまでの時間と等しいので，T_1 を用いて $T_2 = \boxed{\text{カ}} \times T_1$ と表せる。同様にして，Y_2 も Y_1 を用いて，$Y_2 = \boxed{\text{キ}} \times Y_1$ と表せる。

問7 $0 < \boxed{\text{キ}} < 1$ より $Y_2 < Y_1$ であるから，地面との衝突の際には，小球の力学的エネルギーが失われる。このような非弾性衝突において失われた小球の力学的エネルギーは，一般に何に変わったと考えられるかを答えよ。

同様に考えると，T_3，Y_3 は

$$T_3 = \boxed{\text{カ}} \times T_2 = \left(\boxed{\text{カ}}\right)^2 T_1,$$
$$Y_3 = \boxed{\text{キ}} \times Y_2 = \left(\boxed{\text{キ}}\right)^2 Y_1$$

となる。これを繰り返すと，$Y_n = \left(\boxed{\text{キ}}\right)^{n-1} Y_1$ であり，小球が投射されてから地面と n 回衝突するまでにかかる時間は $T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$ となる。

問8 衝突回数 n が十分大きく（$n \to \infty$）なれば，$Y_n \to 0$ となるので，小球は鉛直方向にはね返らなくなる。これには無限回の衝突が必要であるが，それに必要な時間 $T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ は有限である。T を e，T_1 を用いて表せ。ここで，$0 < c < 1$ に対して $1 + c + c^2 + c^3 + \cdots = \dfrac{1}{1 - c}$ となることを用いよ。

Ⅱ　空所を埋め，問いに答えよ。(配点 45)

図１に平行板コンデンサーを起電力 V〔V〕の電源で充電する回路を示す。コンデンサーは真空中に置き，下の極板は絶縁された台上に固定する。極板の面積は S〔m^2〕，極板の間隔は d〔m〕であり，始めスイッチは開かれており極板に電荷はない。また，極板の質量は無視する。

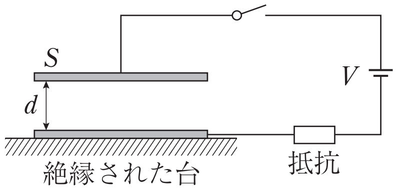

図１　平行板コンデンサーを充電する回路

（１）　スイッチを閉じて充電すると電気量 Q〔C〕が蓄えられ，極板間にのみ一様な電場（電界）ができた。ガウスの法則により極板間の電場の強さは一様で，真空の誘電率 ε_0〔F/m〕を用いて

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

と求められる。

問１　このコンデンサーの電気容量が $\varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$ となることを示せ。

充電するときに電池がした仕事は QV，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは $\dfrac{1}{2}QV$ である。

問２　両者が一致しない理由を簡潔に述べよ。

極板には正負の電荷があり，互いに引き合う力が極板間にはたらく。スイッチを開き，上の極板を極板間の引力とつり合う外力により，ゆっくりと極板間隔を微小な距離 Δd〔m〕広げた。このとき，極板間の電位差は変化する。

問３　極板を持ち上げた後にコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを求め，V を用いずに表せ。

外力がした仕事により，静電エネルギーは増加している。

問４　極板間にはたらく引力の大きさを求め，V を用いずに表せ。

スイッチを開いているので，極板上の電気量は変化しない。そのため，極板間にはたらく引力は，極板間隔 d が変化しても変わらないことがわかる。

（2） 極板間隔を d に戻してスイッチを閉じ，今度はスイッチを閉じたまま上の極板に（1）のときと同じように外力を加えてゆっくりと極板間隔を微小な距離 Δd 広げた。このとき，コンデンサーに蓄えられる電気量は変化する。

問5　極板間隔を広げた後，コンデンサーに蓄えられている電気量を求め，Q を用いずに表せ。

問6　また，このときコンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを求め，Q を用いずに表せ。

問7　外力が仕事をしたが，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーは減少している。失われたエネルギーは何に使われたかを簡潔に述べよ。

スイッチを閉じているので極板間の電位差は変化しない。そのため極板間にはたらく引力 F〔N〕は，極板間隔 d により変化する。極板間隔 d を変化させても，極板間にのみ一様な電場ができるとする。

問8　極板間隔が d_0〔m〕のとき，極板間にはたらく引力の大きさが F_0〔N〕であった。F と d との関係を示すグラフの概形を解答欄の図に描け。

（3） コンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化に着目すると，コンデンサー内部にどのような力がはたらいているかを類推できる。図1の極板間の空間にすっぽりと収まる比誘電率 ε_r（>1）の誘電体を用意し，コンデンサーを充電して電気量 Q を蓄えてからスイッチを開いて図2のように誘電体の一部を極板間に挿入した。このとき，極板面積 S の x 倍（$0 < x < 1$）の部分が誘電体でみたされていた。

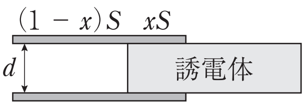

図2　平行板コンデンサーへの誘電体の挿入

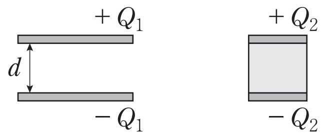

図3　2つのコンデンサー

図2のコンデンサーは図3の2つのコンデンサーを並列接続したものと見なすことができる。このとき，2つのコンデンサーに蓄えられた電気量をそれぞれ Q_1〔C〕，Q_2〔C〕とすると，

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

である。極板間の電位差が等しくなることから，

$$Q_1 = \boxed{\quad ア \quad} \times Q,$$

$$Q_2 = \boxed{\quad イ \quad} \times Q$$

となり，2つのコンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの和は次の式で与えられる。

$$\frac{1}{(\varepsilon_r - 1)x + 1} \times \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 S}$$

問9　誘電体を挿入するとき，コンデンサーから誘電体にどのような向きの力がはたらくか，エネルギーに着目して簡潔に述べよ。

Ⅲ　空所を埋め，問いに答えよ。 ケ は語句で埋めよ。（配点 45）

（1）　図1のような中心O，半径 r の球形容器内に，単原子分子 N 個からなる理想気体を封入する。容器の内壁はなめらかで気体分子は内壁に対して弾性衝突を繰り返し，気体分子同士の衝突は考えない。また，気体分子の大きさや重力は無視する。

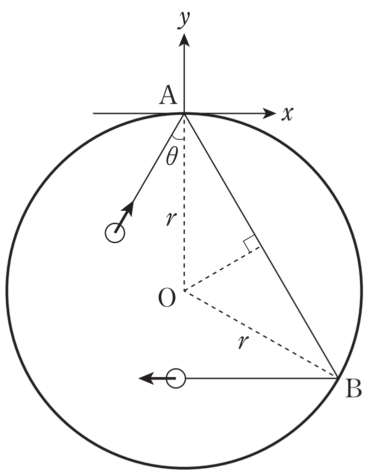

図1

図1のように1個の気体分子が速さ v で容器の内壁の点Aに入射角 θ で衝突し（$0° \leqq \theta < 90°$），その後内壁の点Bに衝突した。図1の∠OABが θ，衝突後の気体分子の速さが v であるので，この気体分子が線分ABを移動するのに要する時間 T_1 は r，θ，v を用いて ア と表される。

図1の点Aで衝突する直前に気体分子がもつ運動量の大きさを p とする。1個の気体分子が点Aでの衝突で容器の内壁におよぼす力積を求めると，点Aで容器に接する方向（x 軸方向）の成分 I_x は イ ，容器に直交する方向（y 軸方向）の成分 I_y は ウ となる。ただし，図1中の x 軸，y 軸の向きを正とする。

気体分子が内壁に衝突する回数の単位時間あたりの平均値は，次の衝突までに要する時間 T_1 の逆数で与えられるので，1個の気体分子が容器の内壁に及ぼす単位時間あたりの力の平均の大きさ $\overline{f_1}$ は，$\overline{f_1} = \dfrac{I_y}{T_1}$ として求められる。これらの関係を組み合わせると，$\overline{f_1}$ は，p，v，r を用いて次式のように表される。

$$\overline{f_1} = \frac{pv}{r} \qquad ①$$

以下では，すべての気体分子の速さを v，質量を m とする。このとき，全気体分子が容器の内壁に与える力の単位時間あたりの平均の大きさを球形容器の内壁の面積 $4\pi r^2$ で割ると，この理想気体の圧力の大きさは N，m，v，r を用いて エ と表される。一方，容器内の理想気体の内部エネルギー U は気体分子の全運動エネルギーとなるので，m，v，N を用いて オ と表される。

問1　半径 r の球形容器の体積を $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ とし， エ で求めた理想気体の圧力の大きさを P_1 として，理想気体の内部エネルギー U を P_1 と V を用いて書き換えよ。

（2） 単位体積あたりの光のエネルギー（エネルギー密度）u と圧力 P_2 の関係は，②式にしたがうことが知られており，実験でも良い精度で確かめられている。

$$P_2 = \frac{1}{3}u \qquad ②$$

以下では光を光子の集まりとして（1）の考察と同様に考え，光子1個の運動量の大きさを導出しよう。

半径 r の球形容器内に N 個の光子を封入する。この光子の集まりを光子気体と呼ぶ。光子同士は衝突せず，図1のように光子は内壁と弾性衝突を繰り返すと仮定する。また，プランク定数を h，光速を c とする。これらの光子はすべて同じ振動数 ν をもつとすると，1個の光子が持つエネルギー ε は $\boxed{\text{カ}}$ である。よって，容器内の光のエネルギー密度 u は次式のように求められる。

$$u = \frac{N\varepsilon}{V} = \frac{3N\varepsilon}{4\pi r^3} \qquad ③$$

ここで（1）の考察を分子から光子に置き換え，光子気体の圧力を求める。1個の光子が容器の壁に及ぼす力の平均の大きさ $\overline{f_2}$ は，①式の右辺の v を c に置き換えればよい。容器内に閉じ込められた光子の持つ運動量の大きさ p がすべて等しいと仮定する。光子気体が容器に及ぼす圧力の大きさ P_2 を N, p, r, c を用いて書き換えると，次式が得られる。

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{4\pi r^3} \qquad ④$$

以上の考察によって得られた関係式を整理すると，1個の光子が持つ運動量の大きさ p を得る。

問2 ③および④式を②式に代入し，$\boxed{\text{カ}}$ を適用して，1個の光子が持つ運動量の大きさ p を h, c, ν を用いて表し，その導出過程を示せ。

（3） 真空中を進む光の波長 λ は ν, c を用いて $\boxed{\text{ク}}$ と表される。また，X線は光と同様に電磁波の一種である。図2のようなX線の光子と電子の弾性衝突を考えると，入射X線と散乱X線に含まれる光子の運動量の大きさは変化する。ここで，問2で得られた結果を用いてX線に含まれる光子の運動量の大きさをX線の波長を用いて表すと，衝突前後でX線の波長が変化する現象を説明できる。この現象は $\boxed{\text{ケ}}$ 効果と呼ばれ，光の粒子性を決定づける根拠の一つとして知られている。

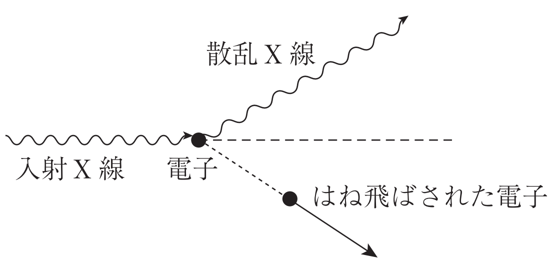

図2