物　理

Ⅰ　問いに答え，空所を埋めよ。 ア ～ オ は選択肢{　　}の中から適切なものを選んで答えよ。水の密度を ρ，重力加速度の大きさを g とする。（配点 60）

断面積 S，高さ h で一様な密度 ρ_0 の円柱を考える。

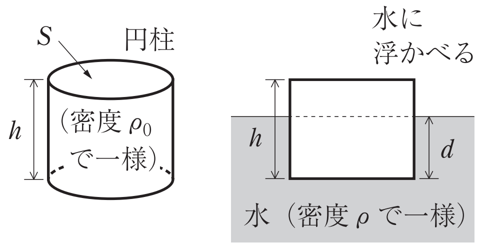

図１

（１）　図１のように，円柱を水に浮かべたところ，水面から円柱の底面まで深さ d で静止した。

問１　円柱にはたらく重力の大きさを ρ_0 を含む式で表せ。

問２　円柱にはたらく浮力の大きさを ρ を含む式で表せ。

問３　円柱の密度 ρ_0 を h, d, ρ を用いて表せ。

（２）　円柱が水に浮かんで静止しているとき，その重心は水面から深さ $\frac{1}{4}h$ の位置にあった。このときの重心の位置を原点Oとして，図２(a)のように，鉛直下向きに x 軸をとる。

問４　このときの円柱の密度を ρ を用いて表せ。

その後，図２(b)のように，$A\left(A<\frac{1}{4}h\right)$ だけわずかに押し下げ，静かにはなすと，円柱は x 軸方向に振動を開始した。以降，円柱の位置を重心の座標 x で表すこととする。振動中も水面の高さは一定であり，水の抵抗は無視できるとする。

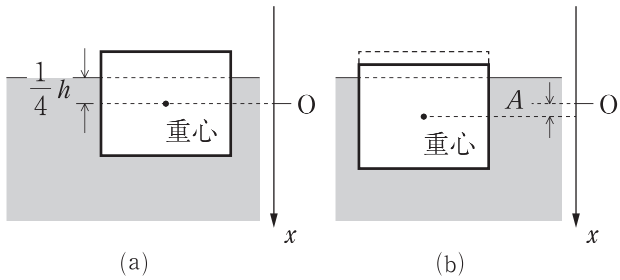

図２

問５　円柱の位置が x にあるとき，円柱にはたらく力の合力を S, x, ρ, g を用いて表せ。

問５の結果よりこの振動が単振動であることがわかる。

問６　単振動の中心の位置（x 座標）を求めよ。

問７　単振動の周期を h, g を用いて表せ。

（３）　図３のように，円柱と同じ形の断面（面積 S）で，高さが $\frac{1}{8}h$ の円柱形であり，一様な密度 2ρ のおもりを円柱の底面にふちをそろえて接着した。以下，円柱とおもりが一体となったものを物体とよぶ。円柱の密度は問４の答えで与えられるとする。また，接着剤の質量，体積は無視できるとする。

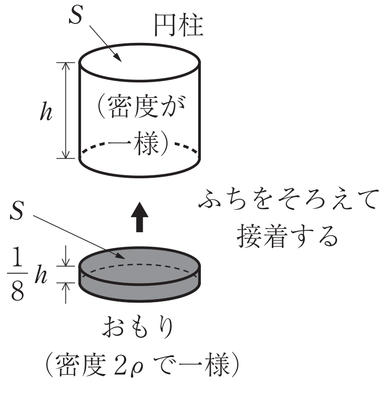

図３

問８　物体にはたらく重力の大きさを S, h, ρ, g を用いて表せ。

その後，物体を水に静かに浮かべたところ，図４のように，ある深さまで沈んだ状態で静止した。

問９　水に浮かんで静止しているとき，水面からおもりの底面までの深さを h を用いて表せ。

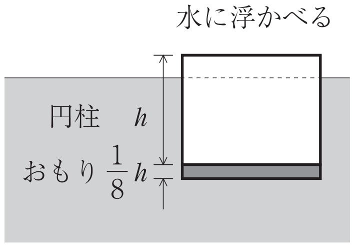

図４

次に，水に浮かんで静止していた物体の中心軸を鉛直方向からわずかに傾け，静かにはなした。このとき物体が元に戻るか，さらに傾くかを検討する。図５のように紙面内での物体の回転を考える。物体が沈んでいる部分を水に置きかえると，その重心に浮力が作用する（この点を浮心と呼ぶ）。物体の中心軸が鉛直方向にあるときの浮心の位置を点Ｃとする（図５(a)）。このとき，物体の重心の位置Ｇは，点Ｃよりも，下に位置している。図５(a)のように水面と物体の中心線との交点を点Ｐとする。

図５(b)のように点Ｐを中心として，わずかに時計まわりに回転すると，回転前と比べて右側の $\varDelta$R 部分は水中に沈み浮力を受ける。一方で左側の $\varDelta$L 部分は空中に出ることにより浮力を失う。この $\varDelta$R 部分と $\varDelta$L 部分の体積は等しいため，物体にはたらく浮力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ ｛増加する，変化しない，減少する｝。したがって，点Ｐは常に物体の回転の中心であると考えることができる。わずかに回転したとき，物体の中心線 PG より右側で浮力が増加し，左側で減少することから，浮心の位置は線分 PG よりも少し $\boxed{\text{イ}}$ ｛右側，左側｝に移動する。このとき，浮心は回転の中心Ｐを通る鉛直線よりも左側にあるとする。これにより，回転の中心Ｐまわりの力のモーメントが生じる。この浮力による力のモーメントは物体を $\boxed{\text{ウ}}$ ｛時計まわり，反時計まわり｝の向きに回転させるようにはたらく。一方，重力による力のモーメントは物体を $\boxed{\text{エ}}$ ｛時計まわり，反時計まわり｝の向きに回転させるようにはたらく。これらの力のモーメントのはたらきを考えると，この物体は $\boxed{\text{オ}}$ ｛元に戻る，さらに傾く｝ことがわかる。

問10　物体が $\boxed{\text{オ}}$ のように動く理由を力のモーメントのはたらきから説明せよ。そのとき，以下の語句をすべて用いて，その語句に下線を引け（浮力，重力，モーメントのうでの長さ）。

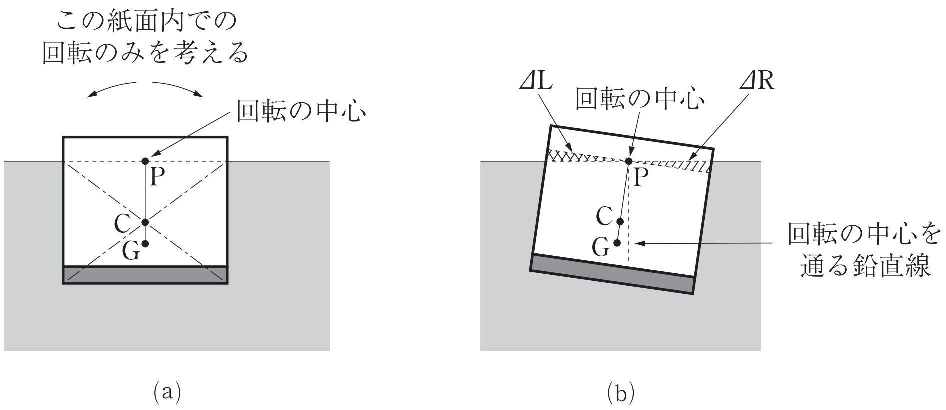

図５

Ⅱ　問いに答えよ。(配点 45)

図１のように真空中で円柱状に分布した荷電粒子の集合を考える。荷電粒子はいずれも電気量 q $(q > 0)$ で，静止しているとする。また，荷電粒子は単位体積当たり n 個分布している。このとき，n は十分大きいので円柱内の電荷分布は一様とみなせる。円柱は半径が a で，円柱の中心軸に沿って z 軸をとり，十分に長いとする。真空中のクーロンの法則の比例定数を k_0 とし，重力の効果は考えない。

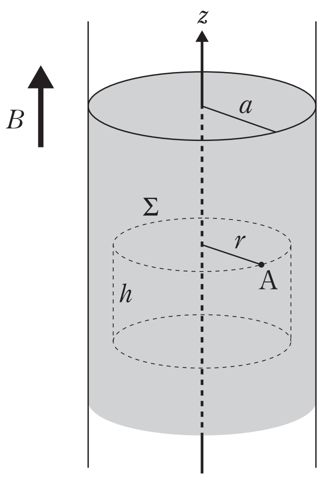

図１

図１のように z 軸を中心軸とする半径 r $(r < a)$，高さ h の円筒形の閉曲面 Σ と，z 軸から距離 r の点Ａを考える。

問１　閉曲面 Σ の内部にある電気量を求めよ。

問２　点Ａでの電場（電界）の向きを次の (a)〜(d) の中から選び，記号で答えよ。

(a)　z 軸の正の向き　　(b)　z 軸の負の向き

(c)　z 軸から遠ざかる向き　　(d)　z 軸に近づく向き

問３　ガウスの法則を用いて点Ａにおける電場の大きさを求めよ。

次に，z 軸の正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場（磁界）をかけ，質量 m，電気量 q の試験電荷を z 軸を中心として円運動させる。円柱状の荷電粒子の集合は静止したままである。円運動の半径を r $(r < a)$，試験電荷の角速度を ω とすると，運動方程式は次のように書ける。

$$mr\omega^2 = \boxed{\quad ア \quad} \times \omega - 2\pi k_0 n q^2 r \qquad ①$$

問４　空所アを埋めよ。

問５　式①の右辺第２項の力の名称を答えよ。

問６　z 軸の正の側（図１で上側）から見たとき，試験電荷はどちら向きに円運動しているか。次の (a), (b) から選び記号で答えよ。

(a)　時計まわり　　(b)　反時計まわり

式①を ω について解くと，解は次の形に表せる。

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c{}^2 - 2\omega_p{}^2}\right) = \frac{\omega_c}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^2}\right\} \qquad \text{（複号同順）}$$

問７　ω_c と ω_p を求めよ。

問８　n には最大値 n_B があり，それを超えると式①をみたす ω の実数解が存在せず，試験電荷は円運動できない。k_0, m, B を用いて n_B を求めよ。

問９　図２の ω-n グラフには $\omega = \omega_+$ を表す曲線が点線で示されている。$\omega = \omega_-$ を表すグラフを解答欄の図に**実線で**描け。

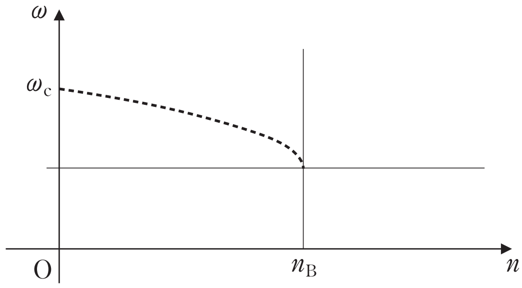

図２

ω_p が ω_c に比べて十分に小さい場合 $\left(\frac{\omega_p}{\omega_c} \ll 1\right)$ を考える。このとき，ω_+ の解は $\omega_+ \fallingdotseq \omega_c$ と近似できる。式①を ω_p, ω_c を用いて表して，近似式 $\omega_+ \fallingdotseq \omega_c$ を用いると，左辺と右辺第１項に比べて右辺第２項は小さいので無視できることがわかる。したがって，この項以外の２つの項で運動が決まっていると考えられる。また，角速度 ω_c はサイクロトロン振動数になっている。ω_- の解は $\omega_- \fallingdotseq \frac{\omega_p{}^2}{2\omega_c}$ と近似できて，同様に式①の３つの項のうち１つだけ小さな値の項があることがわかる。

問10　ω_- の解では式①のどの項が無視できるか。次から選び記号で答えよ。

(a)　左辺　　　(b)　右辺第１項　　　(c)　右辺第２項

式①から分かるように，$r < a$ のとき試験電荷の角速度はどの半径でも同じになる。したがって，円柱状の各荷電粒子を円運動させて，電荷分布全体が一定の角速度で回転するようにできる。これを剛体回転平衡といい，プラズマの閉じ込めなどに応用されている。

Ⅲ　空所を埋め，問いに答えよ。 イ ～ カ は選択肢{　　}の中から適切なものを選んで答えよ。(配点 45)

（1）　大気の密度や温度と高度の関係を考えてみよう。

鉛直上向きに z 軸をとり，標高 0 m の地表を原点 $z=0$ とする。重力加速度の大きさは g で，z によらず一定とする。

図 1 に示すような，断面積が S で，高さが z から $z+\Delta z$ にある気柱を考える。Δz を微小量とする。気柱内の密度は一定として $\overline{\rho}(z)$ とする。高さ z での大気圧を $p(z)$，高さ $z+\Delta z$ での大気圧を

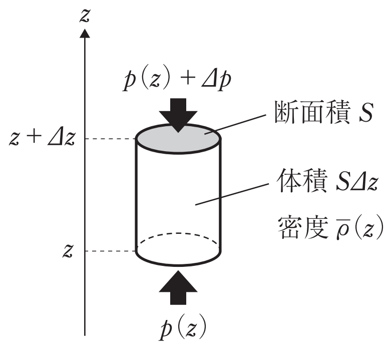

図 1

$$p(z+\Delta z) = p(z) + \Delta p$$

とすると，気柱には上面から下向きに大気圧による力 $(p(z)+\Delta p)S$ がかかる。この力と気柱に加わる重力の合力が，気柱下面から上向きにはたらく大気圧による力とつり合うことから，$\Delta p =$ ア となる。これより，大気圧 $p(z)$ は，z が大きいほど $p(0)$ と比べて，より イ {大きい，小さい}。

地表と高さ z で，物質量が同じ空気の塊を比較しよう。空気は理想気体として，高さ z での空気の温度を $T(z)$ とすると，ボイル・シャルルの法則より，

$$\frac{p(0)}{\overline{\rho}(0)T(0)} = \frac{p(z)}{\overline{\rho}(z)T(z)} \qquad ①$$

が成り立つ。高さが異なるところの空気の塊が，互いに断熱変化で関係づいているとすれば，$p(z) = p(0)\left(\dfrac{T(z)}{T(0)}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$ が成り立つ。ここで，γ は比熱比である。

問 1　$T(z) > T(0)$ となるとき，および $T(z) < T(0)$ となるとき，$\overline{\rho}(z)$ と $\overline{\rho}(0)$ の関係はそれぞれどうなるか。$\{\overline{\rho}(z) > \overline{\rho}(0),\ \overline{\rho}(z) = \overline{\rho}(0),\ \overline{\rho}(z) < \overline{\rho}(0)\}$ のどれかで答え，理由を説明せよ。

（2）　大気中を進む音波について考えよう。風の影響はないものとする。

大気の温度は，地表からの高度によって，高くなったり低くなったりする。この様子を薄い層の大気が重なっているモデルで考える。図 2 のように，地表に沿って x 軸をとり，鉛直上向きに z 軸をとる。大気の層は，何層も重なっていて，それぞれの層の屈折率を $n_1, n_2, \cdots$ とする。原点から，鉛直方向に対して角度 θ_1 の方向に音波が進み始めた。図 2 は音波の進む向きを描いている。音波は，層ごとに屈折をくり返しながら進むものとする。

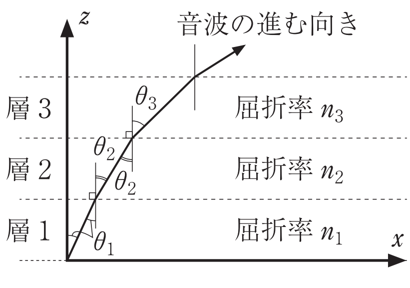

図 2

問 2　1 番目の層から 2 番目の層へ入るとき，入射角 θ_1 で境界面に進んだ音波が，屈折角 θ_2 で進んだとする。$\sin\theta_2$ を θ_1, n_1, n_2 を用いて表せ。

問 3　k 番目の層での屈折角を θ_k とする。$\sin\theta_k$ を θ_1, n_1 と n_k を用いて表せ。

屈折率が単調に増加するとき（$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ のとき），音波は $\boxed{\text{ウ}}$ ｛x 軸，z 軸，直線 $z = x$｝に平行に近づくように進む。逆に，屈折率が単調に減少するとき，音波は $\boxed{\text{エ}}$ ｛x 軸，z 軸，直線 $z = x$｝に平行に近づくように進む。

音速は温度によって変わり，高温では $\boxed{\text{オ}}$ ｛速く，遅く｝なる。このことは，音波の「進みやすさ」が媒質の温度によって変わると考えてもよい。ホイヘンスの素元波の考えによれば，「進みにくい」媒質では波面の間隔が狭くなり，媒質の境界で波は屈折する。

風のないよく晴れた夜に遠くの音が聞こえることがあるが，これは大気の温度が高度によって連続的に変化することで説明できる。上空の温度が地表付近よりも $\boxed{\text{カ}}$ ｛高い，低い｝と，音波は地表側に連続的に曲がっていく。

（3） 惑星の大気をかすめて通過する光の波を考えよう。図3に示すように，惑星をおおう大気を2層の球殻（惑星の表面に近い順に大気層1，大気層2とする）と近似する。大気層1，大気層2，および宇宙空間の屈折率（絶対屈折率）をそれぞれ n_1, n_2, 1とする。また，$n_1 > n_2 > 1$ とする。

問4 図3には，大気層2だけを通過して A_1 点を通って宇宙空間に出てくる単色光の光線Aの経路が描かれている。大気層1も通過して宇宙空間に出てくる単色光の光線Bの経路を解答欄の図に描け。ただし，光線Bは惑星表面にはぶつからず，B_1 点を通り宇宙空間に出るものとする。

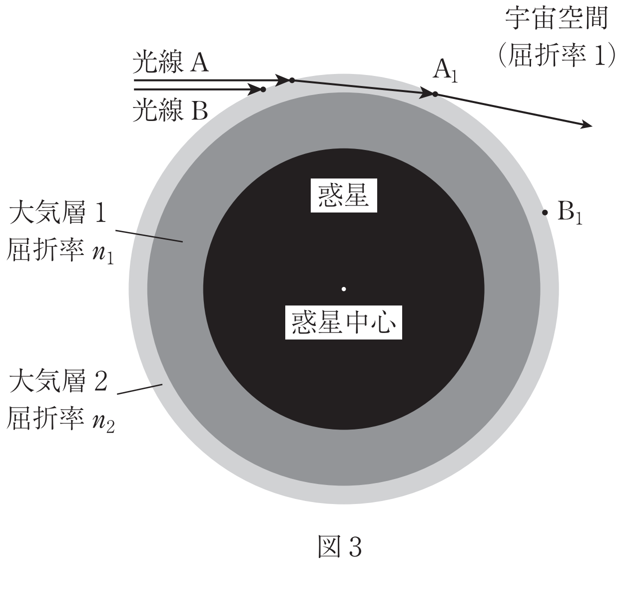

図3

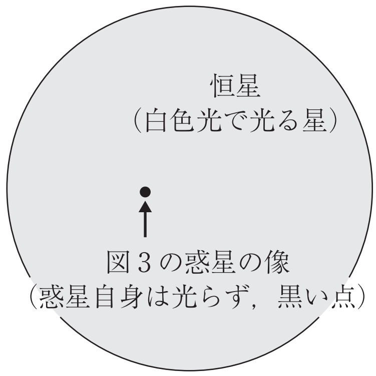

図4

天体望遠鏡で，ある恒星を観測していたところ，その恒星の惑星が前方を通過した（図4）。惑星は恒星の面上に小さな黒い点として見えた。

問5 恒星の光が白色光のとき，惑星の大気の色はどう見えるか説明せよ。ただし，この惑星の大気は，地球と同様に，青い光を散乱させやすく，光の振動数が大きくなるほど屈折率は大きくなるものとする。