一般入試前期A日程１日目

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	4
イ	$\frac{9}{5}$
ウ	$-\frac{25}{4}$
エ	2
オ	$\frac{3}{5}$
カ	$4+3\sqrt{3}$
キ	36
ク	16

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	4
イ	2^{n-3}
ウ	$2n^2-7n+7$
エ	$-\frac{1}{6}$
オ	$\frac{1}{4}$
カ	$\frac{3}{19}$
キ	$\frac{12}{19}$

Ⅲ 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $b=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt$ とおくと，$f(0)=2+b$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2+b$

したがって，$b=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f(0)=-4$

$$f(x)=2\cos 2x+a\sin 2x-4$$

(2) $f'(x)=-4\sin 2x+2a\cos 2x$

(3) $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}+a=0$ より $a=2\sqrt{3}$

(4) $f''(x)=-8\cos 2x-8\sqrt{3}\sin 2x=-16\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $f''(x)=0$ となるのは $x=-\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{5}{12}\pi$

これらの前後で $f''(x)$ の符号が変化するので，いずれも変曲点の x 座標である．

したがって，$x=-\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{5}{12}\pi$

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{12}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／

Ⅳ　**【数学①のみ解答】**（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1)　$f'(x) = 1 + \log(x+1)$

(2)　$f'(x) = 1 + \log(x+1) = 0$　を解くと $x = e^{-1} - 1$

x	-1	$\cdots$	$e^{-1}-1$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$-e^{-1}$，極小	↗

$x = e^{-1} - 1$ のとき極小，極小値 $-e^{-1}$

(3)　2曲線の交点は $(0,0)$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq x\log(x+1)$

$$\text{面積 } S = \int_0^1 \left\{ f(x) - x\log(x+1) \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \log(x+1)\, dx$$

$$= \Big[(x+1)\log(x+1) \Big]_0^1 - \int_0^1 1\, dx$$

$$= 2\log 2 - 1$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log \frac{(2n)!}{n^n\, n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log \left(\left(1+\frac{n}{n}\right)\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \log(1+x)\, dx$$

(3) の計算より　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \log \frac{(2n)!}{n^n\, n!} = \log 2 - \frac{1}{2}$

$\boxed{\mathrm{V}}$ 【数学②のみ解答】

ア	2
イ	$\dfrac{12}{5}$
ウ	$\dfrac{7}{17}x$
エ	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
オ	1
カ	$\dfrac{5}{36}$
キ	$\dfrac{1}{18}$
ク	$\dfrac{17}{36}$

VI 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(2) = 9$

(2) $a = f(2) - f(0) = 2$

(3) (2) より $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

$x = -1$ のとき極大で，極大値 3

$x = 1$ のとき極小で，極小値 -1

(4) $g(x) = x^3 + \left| -3x + 1 \right|$ とおく.

$x \leqq \dfrac{1}{3}$ で $g(x) = f(x)$, $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$

$x > \dfrac{1}{3}$ で $g(x) = x^3 + 3x - 1$ となり，$g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ より

$g(x)$ は増加.

$y = g(x)$ と $y = k$ の共有点の個数が 2 となればよいから $k = \dfrac{1}{27}$, 3