

一般入試前期A日程2日目

物 理

I 空所を埋め、問いに答えよ。(配点 60)

ばね定数 k 、自然長 ℓ の軽いばねの両端に、等しい質量 m の小球 A, B をつないでなめらかな水平面上に置いた。このときの小球 A の位置を原点 O とし、小球 A から B へ向かう向きを正の向きとして x 軸をとる。時刻 $t = 0$ に、小球 A に x 軸の正の向きに初速度 v_0 ($v_0 > 0$) を与えたところ、ばねは伸び縮みしながら 2 つの小球と共に x 軸の正の向きに動いていった (図 1)。小球 A, B の x 座標を x_A, x_B 、速度を v_A, v_B とし、小球がばねから受ける力は常にフックの法則にしたがうとする。

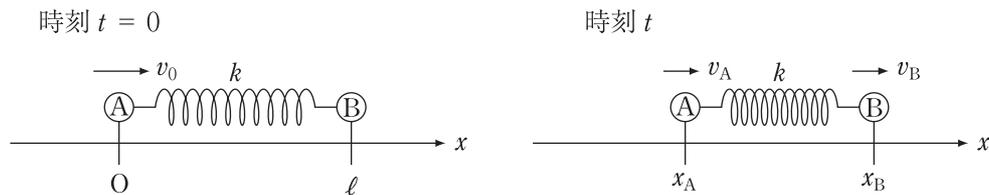


図 1 軽いばねの両端につながれた同じ質量 m の小球 A, B の運動

運動量保存の法則と力学的エネルギー保存の法則はそれぞれ

$$\boxed{\text{ア}} = mv_0 \quad \text{①}$$

$$\boxed{\text{イ}} = \frac{1}{2} mv_0^2 \quad \text{②}$$

と表される。また、小球 A, B の重心はばねの中央で、重心の速度は $\frac{v_0}{2}$ である。

問 1 式①, ②より、ばねが自然長のとき v_A は、 v_0 または 0 であることを示せ。

小球 A に初速度を与えた瞬間からしばらくの間、 $v_A > v_B$ となるので、ばねは縮んでいく。やがてばねは最も縮んだ状態を経て伸びていく。このとき、 $v_A < v_B$ である。ばねの長さが自然長より短い間は、小球 A の加速度は負、小球 B の加速度は正である。

問 2 ばねが最も縮んだときの小球 A, B の速度をそれぞれ求めよ。

問 3 ばねが最も縮んだとき、ばねに蓄えられている弾性力による位置エネルギーを求めよ。

問 4 このときのばねの縮みを求めよ。

小球 A の速度は v_0 から減少し、ばねが自然長にもどったとき $v_A = 0$ となる。このとき $v_B = v_0$ である。

この後、ばねが自然長から伸び、小球 A の加速度は正、小球 B の加速度は負となる。

問 5 ばねが最も伸びたときの小球 A, B の速度をそれぞれ求めよ。

問 6 このときのばねの伸びを求めよ。

最長になった後、ばねは縮んでいき、再び自然長にもどったときの小球 A, B の速度は、 $t = 0$ のときの速度と同じになる。その後は以上と同じ速度変化を繰り返す。

この運動の繰り返しの周期 T を求めるため、重心と同じ速度で動く観測者から小球 A, B の運動がどのように見えるかを考えよう。

問7 小球 A, B は、ばね定数が $2k$ のばねにつながれているとみなせる理由を簡潔に説明せよ。

このことから、この運動の繰り返しの周期 T は、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$ となることが分かる。

問8 図1における小球 A の速度 v_A と位置 x_A の時間変化のグラフを図2に太い実線で示した。小球 B の速度 v_B と位置 x_B のグラフを解答欄の図に描け。

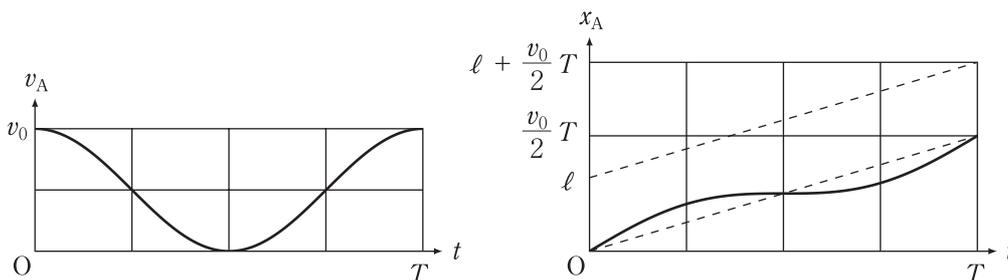


図2 小球 A の速度と位置の時間変化

問9 宇宙船の外で船外活動をしている宇宙飛行士の前を、上で考察したばねでつながれた小球 A, B が振動しながら通過している。図1の x 軸に対して静止している宇宙飛行士が、小球 A または B をつかんで捕捉しようとしている。このとき宇宙飛行士がつかむ瞬間に受ける衝撃が最も小さくなるのは次のいずれの場合か、小球 A をつかむときと小球 B をつかむときのそれぞれについて記号で答えよ。

- (a) ばねが最も縮んだとき
- (b) ばねが最も伸びたとき
- (c) ばねが縮みながら自然長にもどったとき
- (d) ばねが伸びながら自然長にもどったとき

Ⅱ 空所を埋め、問いに答えよ。クーロンの法則の真空中での比例定数を k_0 [$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$] とする。
(配点 45)

(1) 電場（電界）は電気力線が密であるところほど強い。電場の強さが E [N/C] のところでの電場の向きに垂直な面を考え、その面を貫く単位面積あたりの電気力線の本数を E 本とする。電気量 Q [C] の電荷を囲む閉曲面を考える。この曲面を貫く真空中での電気力線の本数は、ガウスの法則により、 Q と k_0 を用いて となる。

半径が a [m] で、厚さが無視できる導体球殻 G が真空中に固定されている。図1に中心を通る G の断面を示す。その表面に正の電気量 $+Q$ ($Q > 0$) を帯電させると、電荷は一様に分布した。図1には向きを矢印で表した電気力線も示している。この G の中心を O とする。 O から距離 r [m] ($r > a$) の点における電場の強さは次のようにして求めることができる。閉曲面として O を中心とする半径 r の球面を考える。球の表面積は $4\pi r^2$ であり、 G から出る電気力線の本数は である。したがって、電場の強さは、 Q, k_0, r を用いて と表すことができる。また、 $r < a$ の G の内側では電場が生じず、等電位となる。無限遠を電位の基準とすると、 $r = a$ での電位は となる。

(2) 図2に示すように、真空中に図1と同じ半径 a の導体球殻 G があり、その外側に厚みをもった導体球殻 H を置いた。 H の内半径は b [m] で、外半径は c [m] である。 G と H の中心は一致している。 G に $+Q$ の電気量を与え、 H に $-Q$ を与えると、 H の内側の表面に電荷が一様に分布した。

問1 G の外側の電気力線を、電気力線の向きに矢印を付けて解答欄の図に描け。ただし、この断面内には電気力線が8本あるとする。

図2での O から距離 r の位置における電場の強さは、ガウスの法則より、 O を中心とする半径 r の球面を貫く電気力線を考えれば求めることができる。 $a < r < b$ では、電場の強さは となる。 G と H の電位差は である。この2つの球殻をコンデンサーとみなせば、この電気容量は k_0, a, b を用いて と表すことができる。

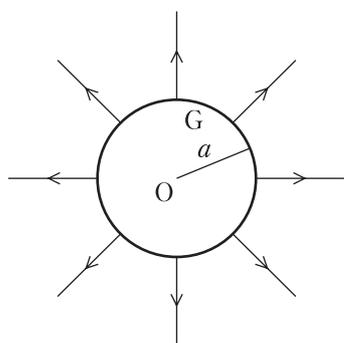


図1

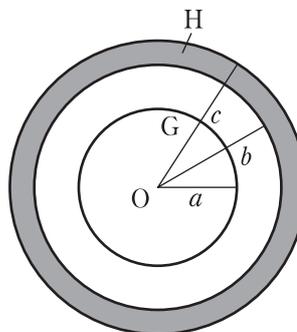


図2

(3) 導体球殻 G と導体球殻 H の電荷分布を (2) と同じ設定とする。図 3 のように、磁束密度の大きさが B [T] の一様な磁場 (磁界) を、紙面に垂直に表から裏に向かう向きにかけた。質量が m [kg]、負の電気量 $-q$ [C] ($q > 0$) をもつ荷電粒子が、図 4 に示すように、紙面内で O を中心とする半径 r の等速円運動を行った。G と H の電荷は、荷電粒子や磁場の影響を受けず、一様に分布して導体球殻の表面に固定されているとする。導体中での磁場は外部と同じとする。

$r < a$ では、荷電粒子は電場の影響を受けず、ローレンツ力を向心力として受け、半径 r の等速円運動を行う。

問 2 荷電粒子の等速円運動の向きは、図 4 の (a), (b) のどちらの向きか記号で答えよ。

問 3 荷電粒子の速さを求めよ。

問 4 荷電粒子の等速円運動の周期を求めよ。

同じ荷電粒子をさまざまな r で等速円運動を行わせた。

問 5 $r < a$ での荷電粒子の等速円運動と同じ向きに運動し、周期が等しくなる r の範囲を下記の (ア) ~ (オ) の中から最も適切なものを 1 つ選び、記号で答えよ。ただし、導体球殻中でも荷電粒子は導体を構成している原子から散乱を受けず、真空中と同じ速さで運動できるとする。

(ア) $r > a$ (イ) $r > b$ (ウ) $r > c$ (エ) $a < r < b$ (オ) $b < r < c$

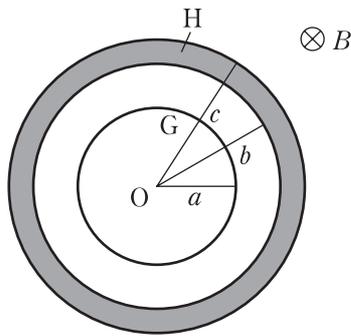


図 3 図 2 に磁場を加えた場合

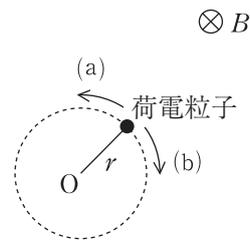


図 4 荷電粒子の運動 (中心 O は図 3 と一致している)

Ⅲ 空所を埋め、問いに答えよ。ウは選択肢{ }の中から適切なものを選び。(配点 45)

- (1) 光量子仮説によると、光は光子(光量子)といわれる小さな粒子の集まりである。波長が λ [m] のひとつの光子がもつエネルギー ϵ [J]、運動量 p [kg·m/s] は、プランク定数 h [J·s]、真空中の光の速さ c [m/s] を用いて、 $\epsilon =$ 、 $p =$ と表される。光量子仮説は、光の波動性では理解できない光電効果の実験結果をうまく説明できる。

光の粒子性をより確実なものとしたのは、コンプトン効果の発見であった。コンプトン効果とは、物質に X 線を入射すると、散乱された X 線の波長が入射 X 線の波長よりも {長く, 短く} なる現象である(図 1)。X 線の波長の変化 $\Delta\lambda$ [m] がもとの波長に比べて十分小さいとすると、 $\Delta\lambda$ は図 1 の散乱角 θ のみに依存し、次のように表すことができる。

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \quad \lambda_c = \frac{h}{mc} \quad \text{①}$$

ここで m [kg] は電子の質量である。 λ_c [m] は長さの次元をもち、電子のコンプトン波長とよばれる。

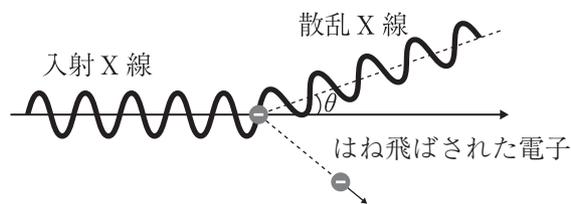


図 1 コンプトン効果

- (2) ラザフォードの原子模型によると、水素原子では、中心に静止した電荷 $+e$ [C] をもつ陽子のまわりを、質量 m 、電荷 $-e$ の電子が軌道半径 r [m]、速さ v [m/s] で等速円運動をしている。重力の影響を無視すると、電子は静電気力を向心力として円運動をする。 k_0 [N·m²/C²] を真空中のクーロンの法則の比例定数とすると、電子にはたらく静電気力の大きさは $k_0 \frac{e^2}{r^2}$ であるから、 r は m, e, k_0, v を用いて

$$r = \text{ } \quad \text{②}$$

と表される。電子のエネルギー E [J] は、運動エネルギーと静電気力による位置エネルギーの和である。静電気力による位置エネルギーの基準点を無限遠にとれば、 E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(\text{ } \right) \quad \text{③}$$

となる。式②を③に代入すると、 E は m, v を用いて $E =$ となる。

このラザフォードの原子模型では、電子の加速運動によって電磁波が放射されるため、原子が安定して存在できない。ボーアはこの困難を克服するため、電子の運動として許されるのは、次の量子条件

$$r \times mv = n \times \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{④}$$

をみたく円運動のみであるという仮定をした。ここで n は量子数とよばれ、式④をみたく状態を、電子の定常状態という。以降、量子数 n の定常状態にあるときの電子の速さ、軌道半径、エネルギーをそれぞれ v_n, r_n, E_n と表す。

式④の量子条件を仮定すると、当時謎であった水素原子のスペクトル線を自然に説明することができる。ここで式の意味を見やすくするために、次のような次元をもたない定数 α を導入する。

$$\alpha = \frac{2\pi k_0 e^2}{hc} \quad \text{⑤}$$

α の値は $\alpha = 7.30 \times 10^{-3}$ であり、これは $\alpha \doteq \frac{1}{137}$ と近似できる。

問1 式⑤の右辺の各物理量の単位に着目し、定数 α が次元をもたないことを示せ。

この定数 α を用いると、原子の世界に現れる物理量を、基準となる他の物理量との比で簡単に表すことができる。式②、④から r を消去し、式⑤から $k_0 e^2 = \frac{hca}{2\pi}$ となることから、 v_n は α, n, c を用いて

$$v_n = \boxed{\text{キ}} \times c \quad \text{⑥}$$

と表される。式⑥を $\boxed{\text{カ}}$ に代入すると、 E_n は m, c, n, α を用いて

$$E_n = - \boxed{\text{ク}} \times mc^2 \times \frac{1}{n^2} \quad \text{⑦}$$

となる。 mc^2 は電子の静止エネルギーである。軌道半径 r_n は、式①の電子のコンプトン波長 λ_c を用いて

$$r_n = \frac{1}{2\pi\alpha} \times \lambda_c \times n^2 \quad \text{⑧}$$

と求められる。基底状態 ($n = 1$) にある電子の軌道半径をボーア半径という。電子のコンプトン波長の値が $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ であることから、ボーア半径の値は

$$r_1 = 5.30 \times 10^{\boxed{\text{ケ}}} \text{ m}$$

となる。これは当時実験で知られていた水素原子の大きさによく一致する。

ボーアはさらに、電子が高いエネルギー準位 E_n の状態から低いエネルギー準位 $E_{n'}$ ($n > n'$) の状態へ遷移する際に、その差に等しいエネルギーをもった光子が放出される、という振動数条件を仮定した。 $\boxed{\text{ア}}$ と式⑦より、このときに放出される光の波長 λ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{⑨}$$

ここで $R = \boxed{\text{ク}} \times \frac{1}{\lambda_c}$ はリュードベリ定数である。また、 $\boxed{\text{ク}} \times mc^2$ は水素原子の電離エネルギー（イオン化エネルギー）とよばれ、これらは当時実験で知られていた値に一致する。

$n' = 2$ の一連のスペクトル線は可視光線領域にあり、これをバルマー系列という。

問2 式⑨を用いて、バルマー系列の $n = 3$ のスペクトルの線を、解答欄の例にならって図に記入せよ。図の横軸はリュードベリ定数の逆数 $\frac{1}{R}$ を単位とした波長であり、例としてバルマー系列の $n = 4 \sim 8$ に対応するスペクトル線が示してある。

バルマー系列の $n = 3$ のスペクトル線は $H\alpha$ 線とよばれ、銀河分布図の作成や星形成領域の観測などに用いられている。