一般入試前期Ａ日程２日目

数　学

$\boxed{\mathrm{I}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) a, b を正の定数とする。

2 次方程式 $2x^2 + 2ax + 15 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，

a の値の範囲は，$a >$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，放物線 $y = 2x^2 + 2bx + 15$ の頂点が直線 $y = x$ 上にあるとき，

$b =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\log_2 \dfrac{a+1}{a} = 3$ を満たす実数 a の値は，$a =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k} =$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $(2x - 3y)^4$ の展開式における x^2y^2 の項の係数は $\boxed{\text{オ}}$ であり，

$(2x - 3y + 1)^7$ の展開式における xy の項の係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) O を原点とする座標平面上に点 A(2, 1) がある。

このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - 6\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 20 = 0$ を満たす点 P の軌跡は，

中心が $\left(\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$，半径が $\boxed{\text{ケ}}$ の円である。

$\boxed{\text{II}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 箱 A の中に $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ の 6 枚のカード,
箱 B の中に $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$ の 6 枚のカードがある。

(i) 箱 A からカードを 1 枚引き，数字を確認して元の箱に戻す。この試行を 3 回行うとき，偶数のカードを 1 回だけ引く確率は $\boxed{\quad ア \quad}$ である。

(ii) 箱 A, B からそれぞれカードを 1 枚ずつ引くとき，引いたカードの 2 つの数の和が 7 となる確率は $\boxed{\quad イ \quad}$ である。

(iii) 箱 A, B からそれぞれカードを 1 枚ずつ引き，数字を確認して元の箱に戻す。この試行を 2 回行うとき，確認した 4 つの数の積が 10 の倍数である確率は $\boxed{\quad ウ \quad}$ である。

(2) 原点を O (0, 0, 0) とする座標空間内に，4 点

$$\mathrm{A}\,(-2,\,2,\,1)\,,\ \mathrm{B}\,(5,\,1,\,2)\,,\ \mathrm{C}\,(1,\,p,\,q)\,,\ \mathrm{D}\,(2^{r},\,2^{-r},\,3)$$

がある。ただし，p, q, r はすべて実数とする。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \boxed{\quad エ \quad}$ である。
さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。このとき，$p = \boxed{\quad オ \quad}$ であり，
$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が最小となるような r の値は，$r = \dfrac{1}{2} \times \boxed{\quad カ \quad}$ である。

Ⅲ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = 3\cos^2 x + 2\cos x - 1 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 定数 p が $0 < p < \pi$ かつ $f(p) = 0$ を満たすとき，$\cos p$ の値を求めよ。

(2) 定数 q が $0 < q < \pi$ かつ $f'(q) = 0$ を満たすとき，$\cos q$ の値を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
ただし，最大，最小となるときの x の値は求めなくてよい。

(4) $p,\ q$ をそれぞれ (1)，(2) で定めた値とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{p+q}{2}} f(x)\,dx$ を計算せよ。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

k を定数とし，$k > 1$ とする。関数 $f(x) = (k - x)\sqrt{k^2 - x^2}$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) x についての不等式 $k^2 - x^2 > 0$ を解け。

(2) $f(x)$ を微分せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(a,\, b)$ $(b > 0)$ を楕円 $C : x^2 + k^4y^2 = k^2$ 上の点とする。
点 $\mathrm{Q}(a,\, 0)$，点 $\mathrm{A}(k,\, 0)$ に対して $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(i) S を b を用いず，a と k の式で表せ。

(ii) 点 $\mathrm{P}(a,\, b)$ が C 上を動くとき，S が最大となる点 P の座標を k を用いて表せ。
また，そのときの S の最大値を求めよ。

$\boxed{\mathrm{V}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) $\angle\mathrm{A}$ が鋭角である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，$b > c$ とする。さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ が等式 $2\sin\angle\mathrm{A}\,\sin(\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}) = 1$ を満たし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径が $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ であるとする。

このとき，公式 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ (θ は実数) より，$\sin\angle\mathrm{A} = \boxed{\text{ア}}$ であり，

$\angle\mathrm{A} = \boxed{\text{イ}}$，$a = \boxed{\text{ウ}}$ である。

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が 1 であるとき，$b = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) (i) $\dfrac{x}{(x+1)(3x+1)} = A\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3x+1}\right)$ が x についての恒等式になるような定数 A の値は，$A = \boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 初項 5, 公比 3 の等比数列を $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。

このとき，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{カ}}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{キ}}$ である。

さらに，$b_n = \dfrac{a_n}{(a_n+1)(3a_n+1)}$ として数列 $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を定める。

(i) の結果を用いて計算すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{12} - \frac{1}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

$\boxed{\text{VI}}$ **【数学 ② のみ解答】**

関数 $f(x) = 4x^3 + 15x^2 + 12x$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) 2 次関数 $g(x)$ が $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = f(x)$ を満たすとき，$g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(4) $f(x)$ の極大値を m とする。x についての方程式 $f(x-p) = m$ が $x \geqq 0$ の範囲において実数解を 1 つだけもつとき，実数の定数 p の値の範囲を求めよ。