一般入試前期Ｂ日程

物　理

I　空所を埋め，問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とし，ばねはフックの法則にしたがうとする。（配点 60）

図１は半円筒面と水平面からなる小球の運動面を示しており，両者はなめらかにつながっている。半円筒面は紙面に垂直であり，点 A から点 C までの半径 R の半円として，その中心軸は点 B として示されている。小球の運動に対する空気抵抗および面と小球との間の摩擦は無視できる。

水平面にばね定数 k の軽いばねの左端を固定する。ばねが自然長のとき，ばねの右端に質量 m の小球を接触させ静止させる。このときの小球の位置を原点 O として水平面にそって右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸をとる。水平面の OA 間の距離 L は，AC の長さ $2R$ に比べ十分に長い。

ばねで押し出された小球が点 C から空中に飛び出す条件と，その後の水平面への落下について考える。

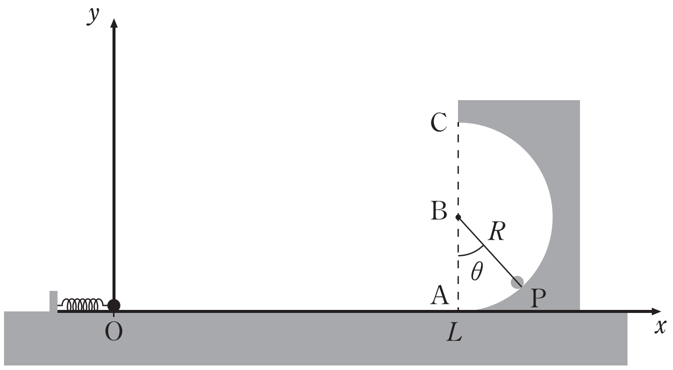

図１

（１）　ばねが自然長から d だけ縮むまで小球を押さえつけて静かにはなした。ばねから離れた瞬間の小球の速さを v とすると，ばねの弾性エネルギーと小球の運動エネルギーの和が一定となるので，次の式が成り立つ。

$$\boxed{\quad ア \quad} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ①$$

小球は速さ v で水平面上を進み，半円筒面に達した。半円筒面上に点 P を考え，$\angle \mathrm{ABP} = \theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。点 P を速さ V_P で通過するとき，小球とともに運動する観測者から見ると小球には大きさ $\boxed{\quad イ \quad}$ の遠心力がはたらく。小球に半円筒面からはたらく垂直抗力の大きさを N とすると，次の力のつり合いの式が成り立つ。

$$N - \boxed{\quad イ \quad} - mg\cos\theta = 0 \qquad ②$$

水平面上での小球の力学的エネルギーを $\frac{1}{2}mv^2$ とすると，力学的エネルギー保存の法則より次式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV_\mathrm{P}{}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

この式と式①より，次式を得る。

$$V_\mathrm{P}{}^2 = \frac{2}{m} \times \boxed{\quad ア \quad} - 2gR(1 - \cos\theta) \qquad ③$$

式②と式③を用いて V_P を消去すると，N は，m, k, d, R, θ, g を用いて次のように書ける。

$$N = \boxed{\quad ウ \quad} \times d^2 - mg\left(2 - \boxed{\quad エ \quad}\right) \qquad ④$$

小球が半円筒面から離れずに上端の点Cに達するためには，$\theta = \pi$ で $N \geqq 0$ が必要である。このため，小球を押し出すばねの縮み d はある値 d_0 より大きくなければならない。式④より，d_0 を m, g, k, R を用いて表すと次のようになる。

$$d_0 = \sqrt{\boxed{\quad オ \quad}} \qquad ⑤$$

$d \geqq d_0$ のとき，小球は点Cから速さ V_C で水平方向に飛び出した。式③より V_C は次の条件をみたす。

$$V_C \geqq \sqrt{gR} \qquad ⑥$$

（2） 図2のように，位置 $(L, 2R)$ の点Cから水平方向に速さ V_C で飛び出した小球の放物運動を考える。

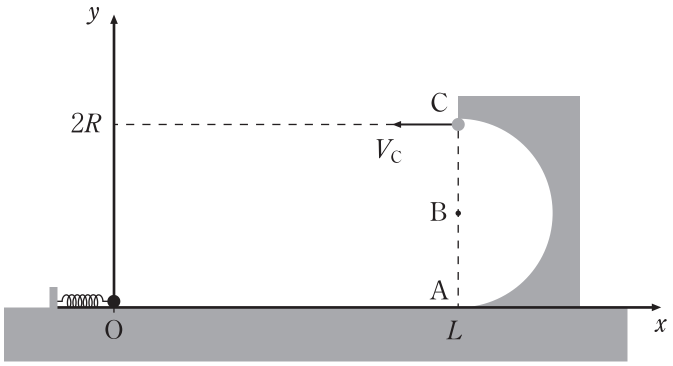

図2

点Cから飛び出した時刻を $t = 0$ とし，小球が水平面に落下するまでの運動を考えると，時刻 t での小球の位置 x, y は次のようになる。

$$x = \boxed{\quad カ \quad} \qquad ⑦$$

$$y = \boxed{\quad キ \quad} \qquad ⑧$$

式⑦と式⑧から t を消去すると次式が得られる。

$$x = -V_C\sqrt{\frac{2(2R - y)}{g}} + L \qquad ⑨$$

式⑨で，$y = 0$ とすると，小球の落下点の位置 x が求まる。
式⑥を考慮すると，縮みが d_0 のばねによって押し出された小球の落下点の位置 x は，$\boxed{\quad ク \quad}$ となる。

以下では，$R = 0.50\ \mathrm{m}$，$L = 5.0\ \mathrm{m}$，$m = 8.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}$ とする。また $g = 1.0 \times 10^{1}\ \mathrm{m/s^2}$ とせよ。

問1 $\boxed{\quad ク \quad}$ の値を有効数字2桁で求めよ。

問2 V_C の最小値を与えるばねの縮みは $d_0 = 2.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$ であった。ばね定数 k〔N/m〕を有効数字2桁で求めよ。

問3 このばねは最大で $2d_0$ まで縮めることができる。$2d_0$ まで縮めて押し出したとき，小球の落下点の位置 x を式⑨を用いて有効数字2桁で求めよ。

問4 問1と問3で求めた落下点を考慮して，ばねの縮みを d_0 から $2d_0$ の間で変えて繰り返し小球を押し出したとき，点Cから落下点までに小球が通過する領域を解答用紙の図に斜線で示し，その境界線を実線で描け。

$\boxed{\text{Ⅱ}}$ 空所を埋め，問いに答えよ。$\boxed{\text{ウ}}$ は選択肢{　　}の中から適切なものを選べ。重力の影響は考えない。(配点 45)

自然科学やデバイス開発などの様々な研究において，ごく短い時間だけ生じる発光のようすを観察することがある。その観察の際には，各時刻での光の強さ（発生した光子の数）を測定する特殊な装置が用いられる。ここでは，少数の光子が時間差をもってばらばらに飛来する状況を仮定して，各光子を時刻別に測定する装置の仕組みを理解しよう。

図1は装置の概略を示す断面図である。装置は真空中に置かれ，紙面右向きに x 軸をとる。はじめに，金属板の左側から光子が1個だけ飛来する。光子1個が金属板に入射すると，金属板の表面右側の x 軸上に光電子が1個発生する。このときの光電子の電気量を $-e$ $(e>0)$〔C〕，質量を m〔kg〕とする。また，発生直後の光電子の速さを 0 m/s とする。金属板と極板Ⅰとの電位差 V_0〔V〕によって，この光電子は x 軸に沿って正の向きに加速される。極板Ⅰに到達したときの光電子の速さ u_0〔m/s〕は $\boxed{\text{　ア　}}$ と表される。次に，光電子は極板Ⅰに開けられた小孔を通り抜け，x 軸に沿ったまま速さ u_0 で極板A, Bの間に入射する。この入射点を原点Oとして，紙面上向きに y 軸をとる。極板Aと極板Bは平行で図のように両端をそろえて配置されており，x 軸方向の長さは ℓ〔m〕で，間隔は d〔m〕である。極板A, Bの右端 $(x=\ell)$ には，光電子を検出することができる幅 d のセンサーが y 軸に平行に配置されている。このセンサーに光電子が到達すると，その地点の y 座標が記録される。光電子は xy 面内のみを運動する。

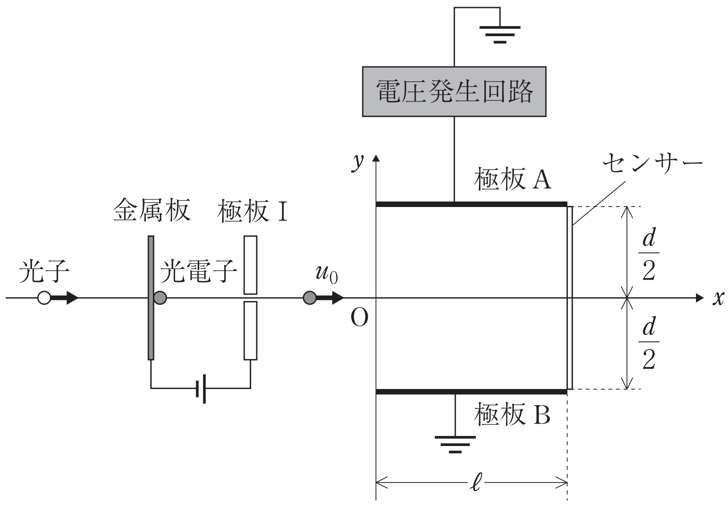

図1

まず，極板Bの電位を基準 (0 V) として，電圧発生回路で極板Aに V_A $(V_A>0)$〔V〕の電位を与えたとする。極板A, B間のみに一様な強さの電場（電界）が y 軸方向に生じ，その大きさは $\boxed{\text{　イ　}}$ と表される。この電場によって光電子は $\boxed{\text{ウ}}$ {極板A，極板B}の方に力を受け，その力による加速度の大きさは $\boxed{\text{　エ　}}$ と表される。光電子が極板A, Bにぶつからずに $x=0$ からセンサーまでを飛行するのに要する時間を t_0〔s〕とする。t_0 は u_0 を用いて $\boxed{\text{　オ　}}$ と表される。$\boxed{\text{　ア　}}$，$\boxed{\text{　エ　}}$，$\boxed{\text{　オ　}}$ から，光電子がセンサーに到達するときの y 座標の値 y_1〔m〕は V_0, V_A, d, ℓ を用いて $\boxed{\text{　カ　}}$ と表される。

以下では，$V_0 = 5.0 \times 10^3\,\mathrm{V}$，$\ell = 1.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$，$d = 1.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$，$\dfrac{e}{m} = 1.8 \times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ として光電子の運動を具体的に調べる。

問１　光電子が極板 A, B にぶつからずにセンサーに到達するためには V_A をある値よりも小さくしなければならない。その値を有効数字２桁で求めよ。

問２　t_0 を有効数字２桁で求めよ。ただし，$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$ とせよ。

次に，４つの光子が時間差をもって飛来することを考えよう。各光子は電気量が $-e$ で質量が m の光電子を１個発生させる。それらの光電子は，光子が飛来するときの時間差を保ったまま x 軸に沿って速さ u_0 で極板 A, B 間に入射する。この４つの光電子の呼び名は，センサーで検出される順に E1，E2，E3，E4 とする。測定を開始した時刻を 0 s として，図２に示すように時刻 τ〔s〕に対して極板 A の電位 V_A を変化させた。このとき，光電子 E1，E2，E3，E4 がセンサーで検出された際の y_1 は，順に 1.00 mm，0.50 mm，0.00 mm，-0.50 mm であった。

問３　E1は $\tau = 1.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ で検出された。E2，E3，E4 が検出された τ として適切なものを以下の(a)〜(g)の中から選んで記号で答えよ。ただし，V_A が変化しているとき，極板 A, B 間に光電子は存在しないとする。

(a)　$2.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$　(b)　$3.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$　(c)　$4.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$　(d)　$5.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$

(e)　$6.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$　(f)　$7.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$　(g)　$8.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$

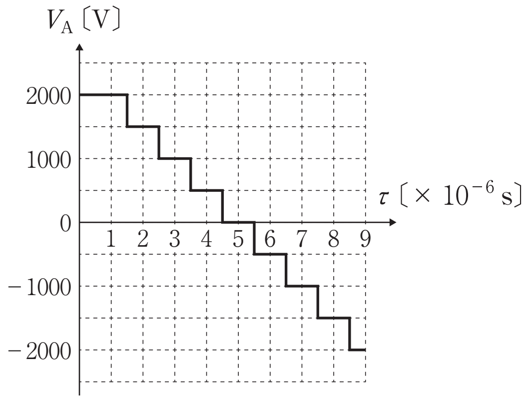

図２

このように，光子が飛来する時刻が y_1 の値の違いとして記録される。実際の装置のセンサーには蛍光板が用いられており，光電子が当たって生じた輝点から位置情報を読み取っている。

Ⅲ　空所を埋め，問いに答えよ。$\boxed{オ}$ は選択肢{　　}の中から適切なものを選べ。(配点 45)

（1）　図1のように媒質Aから媒質Bへ進む平面波がある。矢印は波が進む向きを表す。媒質Aから入射角 θ_A で入射した波は境界面で屈折し，屈折角 θ_B で媒質Bを進んだ。波の一部は境界面で反射した（破線の矢印）。点線は境界面に対する法線である。媒質Aの屈折率を n_A，媒質Bの屈折率を n_B とすると $n_A, n_B, \theta_A, \theta_B$ の間には $n_A \sin\theta_A =$ $\boxed{ア}$ の関係が成り立つ。

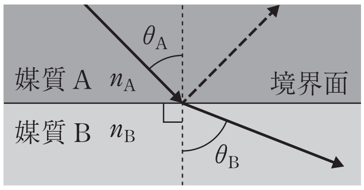

図1　平面波の屈折と反射の様子

$n_A > n_B$ とする。$\theta_B = 90°$ となるときの θ_A は臨界角とよばれ，このとき媒質Aを伝わる波は媒質Bへ進まない。この臨界角以上の入射角の波は境界面で全反射するものとする。

（2）　光ファイバーは光通信や医療用の内視鏡などに活用されている。そのしくみを簡単なモデルで考察しよう。図2に円柱状の光ファイバーの断面を示す。光ファイバーはまっすぐで十分に長く，その長さを ℓ とする。光ファイバーは2層からなっており，内側の円柱状の媒質はコアと呼ばれ，その屈折率（絶対屈折率）は n_1 である。外側の円筒状の媒質はクラッドと呼ばれ，その屈折率は n_2 である。コアとクラッドの中心軸は一致しており，図2の断面はその中心軸を含んでいる。光ファイバーの両端の面は中心軸に対して垂直である。屈折率 n_1, n_2 は一定であり，$n_1 > n_2 > 1$ とする。空気の屈折率を1とし，空気中の光の速さを c とする。

図2の矢印のように単色光（以下，光と呼ぶ）が空気中からコアの左端の面の中心Oに入射した。この光は図2の断面内を進むとする。光がコア内を進み，コアとクラッドの境界面でつねに全反射すれば，光はコアからもれずに光ファイバーの右端の面まで伝わる。したがって離れた場所へ光の信号を少ない損失で送ることができる。

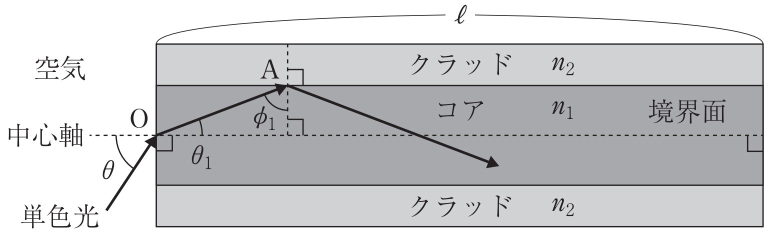

図2　光ファイバーのモデルの断面

空気中から入射角 θ ($0° \leqq \theta < 90°$) でコアに光が入射した。

問1　屈折角 θ_1 について，$\sin\theta_1$ を θ と n_1 を用いて表せ。

問2　コアを進む光の速さを c と n_1 を用いて表せ。

以下では中心Oから入射した光がコアからもれずに光ファイバーを伝わる条件を考えよう。図2の点Aで反射した光について，クラッドとの境界面への入射角をϕ_1とする。点Aで光が全反射するための条件は，ϕ_1, n_1, n_2を用いて次の不等式で表される。

$$\sin\phi_1 \geqq \boxed{\quad イ \quad} \qquad ①$$

図2より$\sin\phi_1 = \cos\theta_1$である。光が空気からコアにさまざまな入射角$\theta$で入射したとき，コアからもれずに光ファイバーを通過する時間には差が生じる。最短の通過時間は光が中心Oから光ファイバーの右端まで最短距離で進む場合であり，ℓ, c, n_1を用いて $\boxed{\quad ウ \quad}$ となる。最長の通過時間は式①よりℓ, c, n_1, n_2を用いて $\boxed{\quad エ \quad}$ となる。

実際の光ファイバーでは入射角θによる光の通過時間の差を縮めるための工夫がなされている。たとえば中心軸を通る光が境界面付近を通るときよりも遅く進むようにする。そのためにコアの屈折率は一定ではなく，中心軸での屈折率が境界面付近の屈折率よりも $\boxed{オ}$ {大きく，小さく}なるように調整されている。

コアの屈折率は一定として，式①に問1の結果を用いることでθ, n_1, n_2の間には次式②の条件が成り立つ。式②をみたしていればコアから光はもれない。

$$\sin\theta \leqq \sqrt{\boxed{\quad カ \quad}} \qquad ②$$

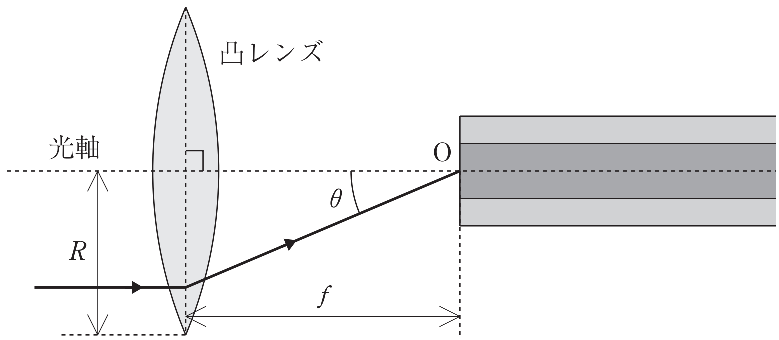

図3　凸レンズの光軸に平行に入射した後，光ファイバーに入射する光

光ファイバーのコアは細いため，レンズで光を集めてコアに入射させると効率が良い。これを簡単なモデルで考察しよう。図3に半径がRで焦点距離がfである円形の薄い凸レンズの断面を示す。凸レンズの中心からの距離がR以下で入射した光はこのレンズによって屈折するものとする。凸レンズの光軸は光ファイバーの中心軸と一致しており，光ファイバーの左端から距離fの位置に凸レンズを設置する。光軸と平行に凸レンズに入射した光は凸レンズを透過した後，中心Oに入射した。図3より入射角θには最大値があり，そのときの$\sin\theta$はRとfを用いて $\boxed{\quad キ \quad}$ と表される。 $\boxed{\quad キ \quad}$ が式②をみたすことから，n_1, n_2, R, fの間には次式③の条件が成り立つ。

$$\left(\boxed{\quad ク \quad}\right) \times R^2 \leqq \left(\boxed{\quad カ \quad}\right) \times f^2 \qquad ③$$

問3　$f = \sqrt{3}R$の凸レンズで式③の条件を考えよう。解答欄に縦軸$n_2{}^2$，横軸$n_1{}^2$の図がある。条件の境界線を実線で描き，条件をみたす領域を斜線で示せ。