数　学

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) $A = \dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^3}{\sqrt{6} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}$ を計算すると，　$A =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

$B = \log_2 \sqrt{8} - \dfrac{1}{2} \log_4 8$ を計算すると，　$B =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 2 次方程式 $2x^2 - 3x + 7 = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$(\alpha - 1)(\beta - 1) =$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\alpha^2 + \beta^2 =$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$2\cos^2\theta - \cos\theta$ の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，

$4\cos^2\theta + \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 1 個のさいころを 3 回投げて出た目の数を順に $a,\ b,\ c$ とする。

(i) $a,\ b,\ c$ がすべて異なる場合は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。

(ii) $a \leqq b \leqq c \leqq 4$ となる場合は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。

$\boxed{\text{II}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) $\triangle$OAB の辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，線分 OP と線分 AQ の交点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{イ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $a_1 + a_2 = 44$，$a_3 + a_4 + a_5 = 141$ を満たすとき，

$a_1 = \boxed{\text{カ}}$ であり，$\{a_n\}$ の公差 d は，$d = \boxed{\text{キ}}$ である。

また，$\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} a_n = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ **【数学 ① のみ解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 曲線 C_1 ：$y = \dfrac{1}{x}$ 上の点 $(1,\,1)$ における接線 l_1 の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ であり，

正の数 k に対して，曲線 C_2：$y = -\dfrac{2}{x}$ 上の点 $\left(-k,\ \dfrac{2}{k}\right)$ における接線 l_2 の

方程式は $y = \boxed{\text{イ}}$ である。

$l_1,\ l_2$ および x 軸で囲まれた三角形の面積を $S(k)$ とすると，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k) = \boxed{\text{ウ}}$

である。

また，$\dfrac{dS(k)}{dk} = (k+1)\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{(k^2+2)^2}$ であるから，$S(k)$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) a を正の定数とし，$f(x) = ax^2 + \sqrt{x}$ とする。

関数 $f(x)$ を積分すると，$\displaystyle\int f(x)\,dx = \boxed{\text{カ}} + C$ （C は積分定数）である。

曲線 $y = f(x)$，直線 $x = 1$ および x 軸で囲まれた図形 A の面積が 1 であるとする。

このとき，$a = \boxed{\text{キ}}$ であり，図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体

の体積 V の値は，$V = \boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅳ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = x - e\log x$ について，次の問いに答えよ。

ただし，e は自然対数の底である。（配点 40）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$，x 軸 および 直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4) (2) の結果を用いて，e^{π} と π^{e} の大小を比較せよ。ただし，π は円周率である。

$\boxed{\mathrm{V}}$　**【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ を微分すると，$f'(x) = \boxed{\text{ア}}$ である。

k を実数の定数とする。$f(x)$ の極値を調べることにより，3 次方程式 $x^3 + 3x^2 = k$ が異なる 3 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めると，

$\boxed{\text{イ}} < k < \boxed{\text{ウ}}$ となる。

(2) 2 つの関数 $\sin\theta + 2\cos\theta$ と $\sin\theta - 2\cos\theta$ はそれぞれ

$$\sin\theta + 2\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)\ ,$$

$$\sin\theta - 2\cos\theta = r\sin(\theta - \alpha) = r\cos(\theta + \beta)$$

の形に変形できる。ただし，r，α，β は定数であり，

$r > 0$，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。

このとき，$r = \boxed{\text{エ}}$ であり，$\tan\alpha = \boxed{\text{オ}}$，$\sin(\alpha + \beta) = \boxed{\text{カ}}$，

$\alpha + \beta = \boxed{\text{キ}}$ である。したがって，$\cos^2\dfrac{\alpha + \beta}{18} = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = 3x + \displaystyle\int_0^1 tf(t)\,dt$ を満たすとする。

（i） $f(x)$ を求めよ。

（ii） $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|f(x)\right|\,dx$ を計算せよ。

(2) 放物線 $y = \dfrac{1}{2}(x^2+3)$ 上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 3)$ における接線を l_1 とする。

（i） l_1 の方程式を求めよ。また，点 P を通り l_1 に垂直な直線 l_2 の方程式を求めよ。

（ii） 円 C が点 P で l_1 に接し，かつ x 軸にも接するとする。

円 C の中心が第 1 象限にあるとき，C の方程式を求めよ。