

一般入試後期D日程

物 理

I 空所を埋め、問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視できるとする。
(配点 60)

図1のように、水平な地面から、地面とのなす角 θ ($0 < \theta < 90^\circ$) 上方に、速さ v_0 で質量 m の小球を投射した。小球を投射した地点を原点 O とし、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、小球を投射した時刻を $t = 0$ とする。小球は xy 平面内を運動する。以下では、投射された小球が $x = L$ の地面に置いてある小さな的に当たるまでの運動を考える。

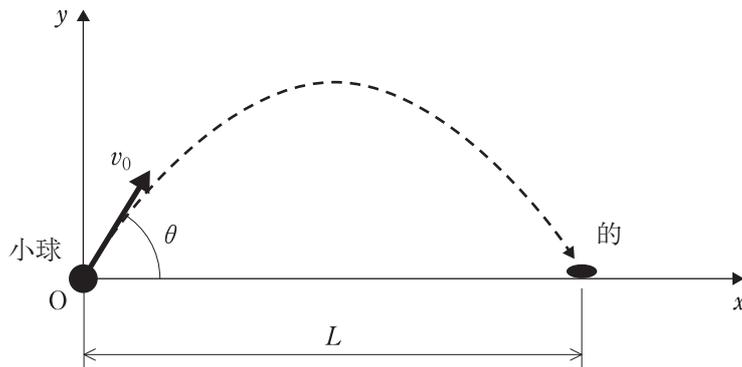


図 1

(1) 投射した小球が、図1中の破線の軌跡を描いて、的に当たった。ここで、時刻 t における小球の速度の x 成分は ア であり、小球の位置の x 座標は イ となる。また、時刻 t における小球の速度の y 成分は ウ となり、小球の位置の y 座標は、

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{①}$$

となる。さらに、小球の軌跡は式②になる。

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad \text{②}$$

問1 式②を導出せよ。

式①から、投射された小球が地面に到達する時刻は、 v_0, g, θ を用いて エ となる。また、小球を的に当てるために設定する角 θ は、 v_0, g, L と、

$$\sin 2\theta = \frac{\text{オ}}{v_0^2} \quad \text{③}$$

の関係をみたさなければならない。

問2 式③をみたす θ が存在するための v_0 の条件を答えよ。

- (2) 次に、図2のように、小球を原点 O から速さ $v_0, \theta = 45^\circ$ で投射した。小球は、一度も地面に当たることなく、 $x = L + D$ ($L, D > 0$) に鉛直に立てられた板に衝突してはね返り、 $x = L$ の地面に置いてある的に当たった。なお、板はなめらかで、小球と板の反発係数（はねかえり係数）は1であるとする。また、板の厚さは考えないものとする。

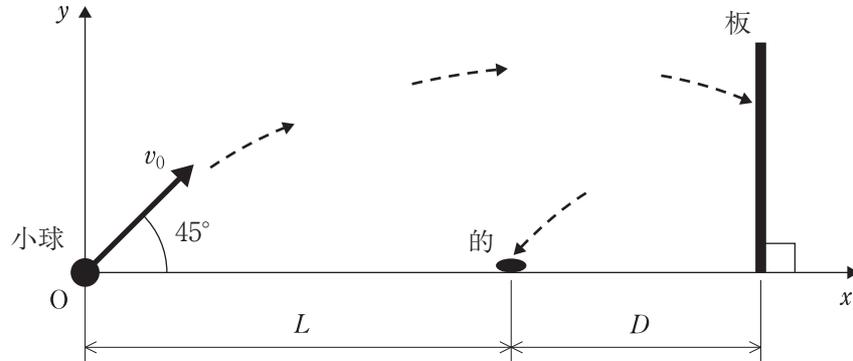


図2

- 問3 小球が板に当たったときの地面からの高さを、 v_0, g, L, D を用いて表せ。
- 問4 板ではね返った小球が的に当たるまでの軌跡を実線で解答欄に記入せよ。ただし、的の位置は描かれていないので、的の位置を黒丸（●）で図示せよ。解答欄には板が存在しない場合の小球の軌跡が破線で描かれている。
- 問5 的と板の距離 D を、 v_0, g, L を用いて表せ。

- (3) さらに、小球の速さは v_0 、投射角度は $\theta = 45^\circ$ のままで、小球と板の反発係数が $\frac{1}{2}$ の板に変更して投射したところ、小球は的に当たらなかった。そこで、的を動かして、的と板がある距離になったとき、投射された小球は板ではね返ったあとの的に当たった。板はなめらかで厚さは考えないものとする。

- 問6 板に衝突した直後の小球の速度の x 成分を、 v_0 を用いて表せ。
- 問7 小球が板に衝突する前後の運動量の変化の大きさを求めよ。
- 問8 このときの的と板の距離を、 D を用いて表せ。

ここで、小球の運動エネルギーの変化を考える。まず原点 O から投射された直後の小球の速さは v_0 であることから、その運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv_0^2$ と表される。一方、的に当たる直前の小球の速度の y 成分は $\times v_0$ となる。これと問6で求めた速度の x 成分から、小球の速さが求まり、的に当たる直前の運動エネルギーを求めることができる。以上の計算から、的に当たる直前の小球の運動エネルギーは、投射された直後の小球の運動エネルギーの 倍と求めることができる。

Ⅱ 空所を埋め、問いに答えよ。ア, カ は選択肢{ }の中から適切なものを選んで答えよ。オ は語句で埋めよ。(配点 45)

質量 m , 電気量 q ($q > 0$) の点電荷 Q の真空中での運動を考える。重力の影響は考えないものとする。

- (1) 図1のように、電源によって一定の電圧を加えて平行な極板1, 2間に一様な電界(電場)を発生させ、 Q を加速する。はじめ Q は極板1で静止しているとする。 Q を図のように極板1から2の向きに加速させるために、極板1の電位が極板2の電位よりア {高く, 低く}なるよう設定する。電圧を V とし、極板間の距離を d とすると、電界の大きさはイ となる。したがって Q の加速度の大きさはウ となることから、極板2に到達したときの Q の速さはエ となる。

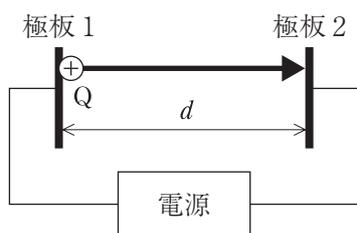


図1

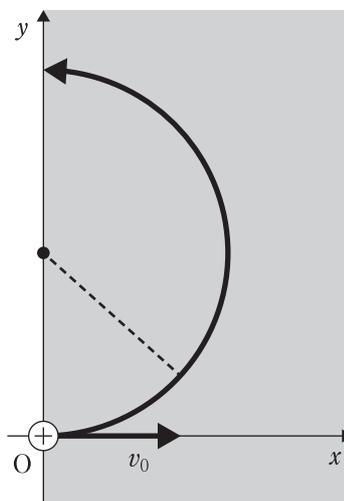


図2

- (2) 図2のように原点 O と x 軸, y 軸を定め、 $x \geq 0$ の領域に磁束密度の大きさ B の一様な磁界(磁場)をかける。原点 O から x 軸の正の向きに速さ v_0 で Q を入射させると、 Q は紙面内で反時計まわりに等速円運動をした。このことから、 Q には向心力として磁界からオ 力が作用しており、磁界はカ {紙面に垂直で裏から表, 紙面に垂直で表から裏, y 軸の正の向き, y 軸の負の向き}に向いていることがわかる。

問1 Q が行う円運動の半径を m, q, B, v_0 を用いて求めよ。

問2 Q が磁界内を半周する時間を m, q, B を用いて求めよ。

(3) 図3の装置は、Qを図1の装置で加速したのち、極板2に空けた小孔を通して図2と同じ磁界に入射し、円運動をさせるものである。ただし磁界は図3のように、 $0 \leq x \leq L$ の範囲にのみかかっているとす。極板2の小孔はQの加速に影響を与えない。Qは原点Oからx軸の正の向きに速さ $v_0 = \boxed{\text{エ}}$ で磁界に入射した。いま、y軸上の $y = 2R_0$ ($R_0 < L$)にあるターゲットPにQを衝突させたい。

問3 幅 L の磁界を抜けることなくQが半円を描くには、Qの円運動の半径が L を超えない必要がある。そのため極板間に加える電圧は、ある電圧 V_{\max} よりも小さくする必要がある。問1と $\boxed{\text{エ}}$ を用いて、 V_{\max} を q, B, m, L を用いて求めよ。

図3の電源に加える電圧を V_t ($V_t < V_{\max}$)としたとき、Qの円運動の半径は R_t となって点Pに到達しなかった。この結果から、Qが半径 R_0 で円運動してPに衝突するために、電圧 V_0 ($V_0 < V_{\max}$)を次の式のように設定する。

$$V_0 = V_t \times \left(\frac{R_0}{R_t} \right) \boxed{\text{キ}}$$

問4 図3の電源に加える電圧が V_0 のときQは半径 R_0 の円運動をしたことから、Qの比電荷 $\frac{q}{m}$ を B, V_0, R_0 を用いて求めよ。

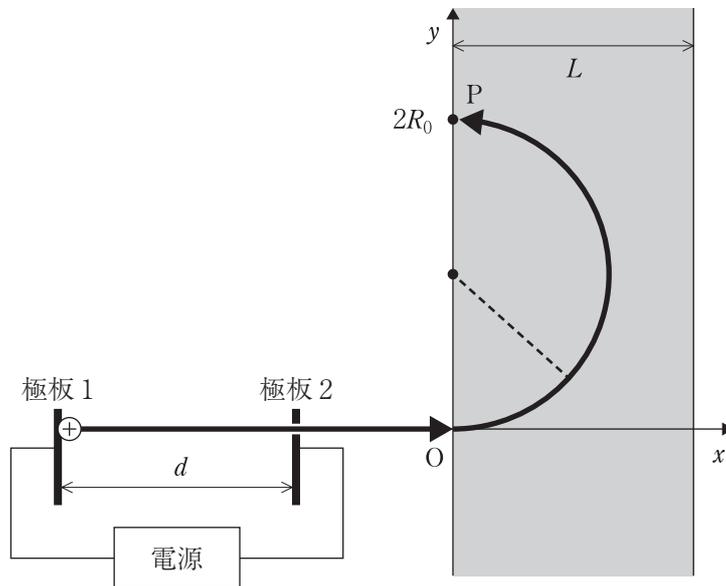


図3

Ⅲ 問いに答え、空所を埋めよ。エ は選択肢{ }の中から適切なものを選べ。(配点 45)

スターリングエンジンは外部の熱を取り込んで仕事に変える熱機関の一種であり、19世紀初頭に発明された。ここではその原理について考えてみよう。

なめらかに動くピストンのついた容器に 1 mol の単原子分子の理想気体が密閉されている。気体定数を R とすると、温度 T の気体の内部エネルギーは $\frac{3}{2}RT$ と表される。以下ではこの気体の状態変化について考えよう。

- (1) 図1のように4つの状態 A, B, C, D を考え、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ とゆっくり状態を変化させるサイクルを熱機関 1 とする。状態 A から B は定積変化、状態 B から C は等温変化、状態 C から D は定積変化、状態 D から A は等温変化である。状態 A の圧力と体積をそれぞれ p_0 , V_0 、状態 B の圧力を $3p_0$ 、状態 C の体積を $3V_0$ とする。

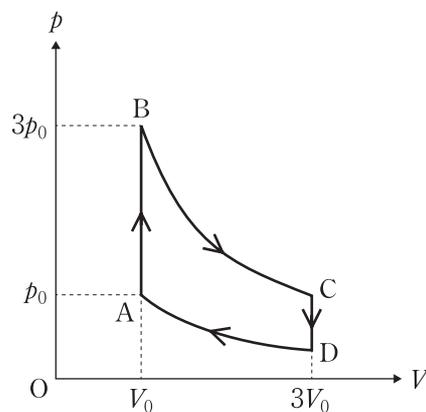


図 1

- 問 1 状態 A および状態 B の温度を、 p_0 , V_0 を含む形でそれぞれ表せ。
 問 2 状態 A から B への変化における気体の内部エネルギーの変化を、 p_0 , V_0 を用いて表せ。
 問 3 状態 B から C への変化で気体が外部にする仕事は $3.3p_0V_0$ である。この変化で気体が外部から吸収する熱量を求めよ。
 問 4 状態 C および状態 D の圧力をそれぞれ求めよ。

状態 C から D への変化で気体は外部へ仕事をしない。また状態 D から A への変化で気体が外部からされる仕事は $1.1p_0V_0$ である。

- 問 5 状態 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ のサイクルについて、気体の温度 T と体積 V の関係を表すグラフを解答欄の図に描け。ただし図中の黒点を状態 A とする。

- (2) 実際のエンジンでは、様々な理由から (1) のサイクルを実現させるのは難しい。ここでは (1) と同じ状態 A, B, C, D について、図2のように状態 A から B を経由せず C に変化する場合を考えよう。状態 C から D は定積変化、状態 D から A は等温変化であり、状態

A→C→D→A とゆっくり変化させるサイクルを熱機関 2 と呼ぶ。

状態 A から C への変化では気体は常に熱を吸収するものとする。また p - V 図上で、熱機関 2 のサイクルは熱機関 1 のサイクルにより囲まれる領域をはみ出さないとする。以下では、熱機関 1 と 2 を比較してみよう。

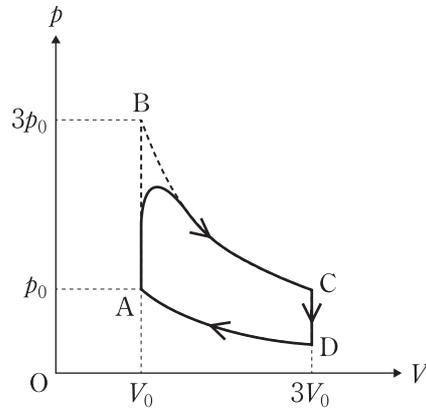


図 2

熱機関 2 において状態 A から C への変化で気体が外部にする仕事を W_2 とすると、この変化で気体が吸収する熱量は $W_2 + \boxed{\text{ア}}$ である。状態 C から D および状態 D から A への変化では気体は外部に熱を放出する。1 サイクルで気体がする正味の仕事は $W_2 - \boxed{\text{イ}}$ なので、熱機関 2 の熱効率 e_2 は

$$e_2 = \frac{W_2 - \boxed{\text{イ}}}{W_2 + \boxed{\text{ア}}}$$

と表される。

一方、熱機関 1 において状態 A から B および状態 B から C への変化で気体が外部にする仕事の合計を W_1 とする。先程と同様に、1 サイクルで気体が吸収する熱量の合計は $W_1 + \boxed{\text{ア}}$ 、気体がする正味の仕事は $W_1 - \boxed{\text{イ}}$ となるので、熱機関 1 の熱効率 e_1 は

$$e_1 = \frac{W_1 - \boxed{\text{イ}}}{W_1 + \boxed{\text{ア}}}$$

と表される。

したがって熱効率の差は

$$e_2 - e_1 = \frac{\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}}{\left(W_1 + \boxed{\text{ア}}\right) \left(W_2 + \boxed{\text{ア}}\right)} \times \left(\boxed{\text{ウ}}\right)$$

となるため、熱機関 2 の熱効率は、熱機関 1 の熱効率と比較して $\boxed{\text{エ}}$ {高くなる, 変わらない, 低くなる} ことがわかる。