一般入試後期Ｄ日程

数　学

$\boxed{\text{I}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1)　全体集合を $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ とし，U の 2 つの部分集合を A, B とする。

$A\cap B=\{2,5\}$, $A\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,5,7,9,10\}$ であるとき，

集合 $\overline{A}\cap B$ の要素の個数は $n(\overline{A}\cap B)=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

集合 B の要素の個数は $n(B)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　整式 $x^{2024}+x^3+2$ を x^2-1 で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$ であり，

整式 $x^{2024}+x^3+2$ を x^2+1 で割った余りは $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　$0<a<8$ とする。O を原点とする座標平面上の 2 点 A, B について，

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=8-a$，$\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ とする。

内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最大となるとき，

$a=$ $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\triangle$OAB の面積 S は $S=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　区別のつかない A と B の 2 種類のコインがあり，

A のコインを投げるとき表が出る確率は $\dfrac{49}{100}$，

B のコインを投げるとき表が出る確率は $\dfrac{63}{100}$ である。

A のコイン 5 枚と B のコイン 2 枚の計 7 枚が入っている袋から

コイン 1 枚を取り出して投げ，コインの表裏を確認する。

このとき，

(i)　コインが表である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii)　コインが表であったときに，そのコインが A である条件付き確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅱ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 30）

(1) 四角形 ABCD は半径 3 の円に内接し，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{DA} = 4$ とする。

このとき，$\sin\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\sin\angle\mathrm{ADC} = \boxed{\text{イ}}$ である。

また，$\mathrm{BD} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) x, y を正の実数とし，$xy = 64$ とする。

$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - 2\log_2 x + 2\log_2 y$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，

そのときの x, y の値はそれぞれ，$x = \boxed{\text{オ}}$，$y = \boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ **【数学 ① のみ解答】**

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) i を虚数単位とし，O を原点とする複素数平面上の 3 点 A(z_1), B(z_2), C(z_3) について，

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$,　$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,　$z_3 = \sqrt{3} + i$ とする。

ただし，r_1, r_2 を正の実数とし，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$,　$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ とする。

(i) $\triangle$OAC が正三角形となるとき，$r_1 = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\theta_1 = \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) $(z_2)^2 = -(r_2)^2 i$ であるとき，$\theta_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) (i) および (ii) が成り立ち，$\angle\text{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ となるとき，$r_2 = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) $f(x) = \sin(\pi e^x)$ とする。

(i) 関数 $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) $x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値は，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) $x < 0$ の範囲において，

関数 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 1 をとる。

(iv) $x < 2$ の範囲において，

方程式 $f(x) = 0$ の相異なる実数解の個数は $\boxed{\text{ク}}$ 個である。

ただし，$e = 2.718\cdots$ とする。

$\boxed{\text{IV}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = (\log x)^2 \ \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ。　　（配点 40）

(1)　$f(x)$ を微分せよ。

(2)　$f(x)$ の第 2 次導関数を求めよ。

(3)　曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。

(4)　(i)　部分積分法を用いて，不定積分 $\displaystyle\int \log x \, dx$ を計算せよ。

　　(ii)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\, dx$ の値を求めよ。

V 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) X, Y を実数とし，t についての 2 次方程式 $t^2 - Xt + Y = 0$ の 2 つの解を p, q とする。ただし，重解をもつときは $p = q$ とする。

(i) X, Y が不等式 $Y \leqq \boxed{\text{ア}} X^2$ を満たすことは，p, q が実数であるための必要十分条件である。

(ii) X, Y が不等式 $\boxed{\text{イ}} X^2 - \boxed{\text{ウ}} \leqq Y \leqq \boxed{\text{ア}} X^2$ を満たすことは，p, q が実数であり，かつ不等式 $p^2 + q^2 \leqq 9$ を満たすための必要十分条件である。

(iii) X, Y が (ii) で定めた不等式を満たすとき，X の 最大値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 数直線上に点 P_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ および点 Q_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をとる。ただし，点 P_{n+1} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を $2:1$ に内分する点であり，点 Q_{n+1} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を $1:1$ に内分する点であるとする。点 P_n の座標を p_n，点 Q_n の座標を q_n とし，$p_1 = 0$, $q_1 = 1$ とする。

このとき，$p_2 = \dfrac{2}{3}$，$q_2 = \dfrac{1}{2}$ であり，p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n を用いた式でそれぞれ表すと，

$$p_{n+1} = \boxed{\text{オ}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$q_{n+1} = \boxed{\text{カ}}$$

である。また，数列 $\{r_n\}$ を $r_n = p_n - q_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。

$\{r_n\}$ の一般項は $r_n = -\left(\boxed{\text{キ}}\right)^{n-1}$ である。

さらに，$q_n = p_n - r_n$ を ① に代入して p_{n+1} と p_n の関係式を求めることにより

数列 $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の一般項を求めると，

$$p_n = \boxed{\text{ク}} \left\{1 - \left(\boxed{\text{キ}}\right)^{n-1}\right\}$$ となる。

$\boxed{\text{VI}}$ **【数学 ② のみ解答】**

2 つの曲線 C_1, C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = x^2 - 23x - 18$$
$$C_2 : y = -x^2 + 5x + 24$$

とする。このとき，以下の問いに答えよ。　（配点 40）

(1) 点 $(0,\ -18)$ における C_1 の接線 l の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた直線 l と平行な直線が 点 P $(p,\ -p^2 + 5p + 24)$ で曲線 C_2 に接するとき，p の値を求めよ。

(3) p を (2) で求めた値とし，a を $0 < a < \dfrac{p}{2}$ とする。

(i) 2 つの曲線 C_1, C_2, および 2 つの直線 $x = a$, $x = 2a$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(ii) (i) で求めた面積 S が最大となる a の値を求めよ。ただし，最大となる S の値は求めなくてよい。