一般入試後期Ｄ日程

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	2
イ	4
ウ	$x+3$
エ	$-x+3$
オ	4
カ	$4\sqrt{2}$
キ	$\frac{53}{100}$
ク	$\frac{35}{53}$

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$\frac{2}{3}$
イ	$\frac{4\sqrt{5}}{9}$
ウ	$\frac{8\sqrt{5}}{3}$
エ	16
オ	16
カ	4

Ⅲ　**【数学①のみ解答】**

ア	2
イ	$\dfrac{\pi}{2}$
ウ	$\dfrac{3\pi}{4}$
エ	$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$
オ	$\pi e^{x}\cos\left(\pi e^{x}\right)$
カ	0
キ	$-\log 2$
ク	7

IV 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 2(\log x) \cdot (\log x)' = \dfrac{2\log x}{x}$ である．

(2) $f'(x)$ をさらに微分することで第2次導関数

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(\log x)'x - (\log x)x'}{x^2} = \frac{2(1-\log x)}{x^2}$$

が得られる．

(3) $f''(x) = 0$ と解くと $x = e$ であり $f(e) = 1$ である．$x = e$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わっているので点 $(e, 1)$ はこの曲線の変曲点である．よって，$y = f(x)$ の変曲点の座標は $(e, 1)$ である．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$(+\infty)$		0		1	

(4) (i) $\log x = (\log x) \cdot (x)'$ を用いて，

$\int \log x \, dx = \int (\log x) \cdot (x)' \, dx = x\log x - \int 1 \cdot dx = x\log x - x + C$. ただし, C は積分定数.

(ii) 以下のように，部分積分法を2回適用して計算する．

$$\begin{aligned} I = \int_{e^{-1}}^{e} (\log x)^2 dx &= \int_{e^{-1}}^{e} (\log x)^2 (x)' dx \\ &= \Big[(\log x)^2 x\Big]_{e^{-1}}^{e} - \int_{e^{-1}}^{e} 2(\log x) dx \\ &= e - e^{-1} - 2\Big[(\log x)x\Big]_{e^{-1}}^{e} + 2\Big[x\Big]_{e^{-1}}^{e} \\ &= e - \frac{5}{e}. \end{aligned}$$

V 【数学②のみ解答】

ア	$\frac{1}{4}$
イ	$\frac{1}{2}$
ウ	$\frac{9}{2}$
エ	$3\sqrt{2}$
オ	$\frac{p_n+2q_n}{3}$
カ	$\frac{p_n+q_n}{2}$
キ	$-\frac{1}{6}$
ク	$\frac{4}{7}$

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

$C_1 : y = x^2 - 23x - 18$ を $f(x)$, $C_2 : y = -x^2 + 5x + 24$ を $g(x)$ とおく.

(1) $f'(x) = 2x - 23$. 点 $(0, -18)$ は C_1 上の点であり，ℓ の傾きは $f'(0) = -23$.

したがって，ℓ の方程式は $y = -23x - 18$.

(2) $g'(x) = -2x + 5$，ℓ に平行な C_2 の接線は $-23 = -2x + 5 \Leftrightarrow x = 14$ を満たす.

よって，$p = 14$.

(3) (i) $p = 14$ より, $0 < a < 7$. C_1, C_2 の二つの交点の x 座標を求めると $x = 7 \pm \sqrt{70}$ であり，$7 - \sqrt{70} < 0$ かつ $7 + \sqrt{70} > 14$ がわかる. また, a から $2a$ の範囲で $-x^2 + 5x + 24 \geqq x^2 - 23x - 18$ である. よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{2a} \{(-x^2 + 5x + 24) - (x^2 - 23x - 18)\} dx \\ &= -\frac{14}{3}a^3 + 42a^2 + 42a. \end{aligned}$$

(ii) (i) より，$S(a) = -\frac{14}{3}a^3 + 42a^2 + 42a$. $S'(a) = -14a^2 + 84a + 42 = -14(a^2 - 6a - 3)$.

よって, $S'(a) = 0$ を満たす a は $a = 3 \pm 2\sqrt{3}$.

$3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}$ のとき $S'(a) > 0$，$a > 3 + 2\sqrt{3}$ のとき $S'(a) < 0$ である.

$a > 0$ より，$S(a)$ を最大にする a の値は $3 + 2\sqrt{3}$.