公募制推薦入試

数　学

I

【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 2 次方程式 $x^2 - 28x + 16 = 0$ の 2 つの解 α, β について，$\sqrt{\alpha\beta} = \boxed{\text{ア}}$ であり，

$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) k を実数とする。$\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^k$ とするとき，$k = \boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$2^{2-x} - 2^{2+x} = 15$ を満たす実数 x の値は，$x = \boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $(x+4)^4$ の展開式における x^2 の項の係数は $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，$(x+4)^{2024}$ の展開式における x^r の項の係数を A_r $(r = 1, 2, 3, \cdots, 2024)$ とおく。

このとき，$A_k = A_{k+1}$ となる k の値は，$k = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) A, B, C, D, E, F の 6 人の中から 4 人を選び，円形のテーブルを囲んで着席させる。

このとき，A と B がともに含まれる座り方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りあり，

さらに，A と B が隣り合う座り方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。ただし，回転すると一致する座り方は同じ座り方であると考える。

Ⅱ **【数学 ① のみ解答】**

次の空所を埋めよ。(配点 30)

(1) 四面体 OABC において，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OC の中点を Q，辺 PQ を 1 : 3 に内分する点を R とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \boxed{\text{ア}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{イ}}\left(4\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

である。さらに，直線 BR と平面 OAC の交点を T とする。$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

である。

(2) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a-5}{3}\right)^n$ が収束するような実数 a の値の範囲は，

$\boxed{\text{オ}} < a < \boxed{\text{カ}}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a-5}{3}\right)^n = 1$ となるとき，$a = \boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\quad(-\pi<x<\pi)$ について，次の問いに答えよ。（配点 30）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) k を実数の定数とする。関数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & (\,0<x<\pi\,)\\[2mm] \dfrac{k\cos x}{1+\cos x} & (\,-\pi<x\leqq 0\,)\end{cases}$$

が $x=0$ で連続であるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{\text{Ⅳ}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 初項 $\log_{10} 2$，公差 $\log_{10} 2$ の等差数列を $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。

このとき，$\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \log_{10} \boxed{\text{ア}}$ である。

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n = \boxed{\text{イ}} \times \log_{10} 2$ である。

さらに，$10^{S_n} > 2024$ となる最小の自然数 n の値は，$n = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $\triangle$ABC の外心を O とし，O は辺 AB，BC，CA 上にないとする。

また，直線 AB 上の 点 P，直線 BC 上の点 Q，直線 CA 上の点 R が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$$

を満たすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{エ}} \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

である。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 9\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{1}{7}\left(\boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

であり，$\angle\mathrm{AOB} = \boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\mathrm{V}}$ **【数学 ② のみ解答】**

関数 $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x$ について，次の問いに答えよ。（配点 30）

(1) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2) a を定数とし，$-1 < a < 0$ とする。

$g(x) = f'(x)$ とし，曲線 $y = g(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\, g(a))$ における接線を l_1 とする。

点 A を通り，傾きが $-1 + g'(a)$ である直線を l_2 とする。

(i) $l_1,\, l_2$ の方程式を求めよ。

(ii) $l_1,\, l_2$ と y 軸の交点をそれぞれ P, Q とし，

線分 AP, 曲線 $y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1,

線分 AQ, 曲線 $y = g(x)$ および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

このとき，$S_1 = S_2$ となるような a の値を求めよ。