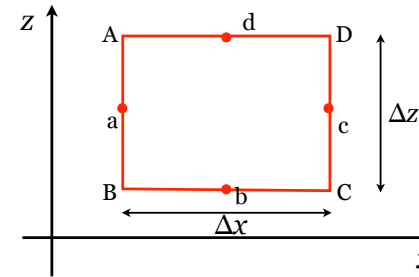


非定常流れの基礎式

1. 観測方法
2. 連続式
3. オイラーの運動方程式
4. 速度ポテンシャル
5. 非定常流れの基礎式

2.1 連続式の意味と等式

「 Δt 時間に閉じられた領域内に流入する水の体積と流出する水の体積は等しい」



辺ABからの流入体積
 $u_a \Delta z \times 1 \times \Delta t$
 u_a : 点aの水平方向流速成分

辺BCからの流入体積
 $w_b \Delta x \times 1 \times \Delta t$

辺CDからの流出体積
 $u_c \Delta z \times 1 \times \Delta t$

辺DAからの流出体積
 $w_d \Delta x \times 1 \times \Delta t$

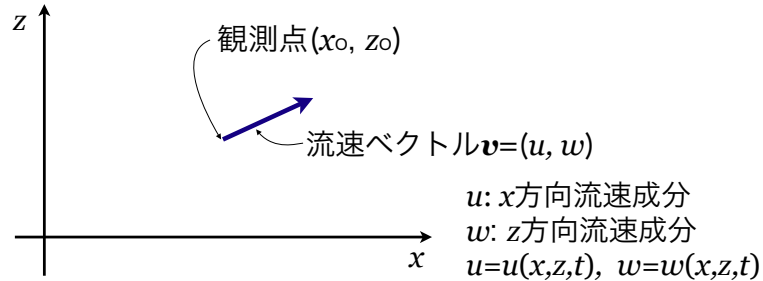
連続式を表す等式

$$u_c \Delta z \times \Delta t + w_d \Delta x \times \Delta t = u_a \Delta z \times \Delta t + w_b \Delta x \times \Delta t$$

1. 観測方法

(1) オイラー法

観測する場所を固定し、速度/圧力などを測る。



(2) ラグランジュ法

観測する粒子を定め粒子を追いかけて、その粒子の位置と圧力を測る

2.2 連続式の一般的表示

$$u_c \Delta z \times \Delta t + w_d \Delta x \times \Delta t = u_a \Delta z \times \Delta t + w_b \Delta x \times \Delta t$$

全てを左辺に移項

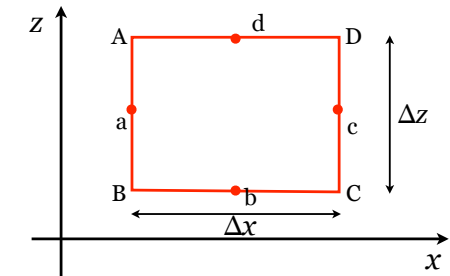
$$u_c \Delta z \times \Delta t + w_d \Delta x \times \Delta t - u_a \Delta z \times \Delta t - w_b \Delta x \times \Delta t = 0$$

両辺を $\Delta x \times \Delta z \times \Delta t$ で割る

$$\frac{u_c - u_a}{\Delta x} + \frac{w_d - w_b}{\Delta z} = 0$$

$\Delta x, \Delta z$ を限りなく小さくし、微分表示 (偏微分) する

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



x-z面の非定常流れに対する連続式
 流れの中なら「どこでもいつでも成り立つ」

3.1 オイラーの運動方程式—運動量の保存

「 Δt 時間に閉じられた領域内に流(出)入する運動量と

力積の和は内部の運動量の増加量に等しい」

運動量、力積はベクトル量なので、ここではz方向成分を考える

運動量の増加量

$$(\rho w_e(t + \Delta t) - \rho w_e(t)) \times \Delta x \times \Delta z \times 1$$

辺ABからの流入量

$$\rho w_a u_a \times \Delta z \times 1 \times \Delta t$$

辺CDからの流出量

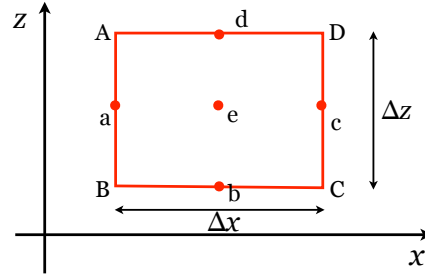
$$\rho w_c u_c \times \Delta z \times 1 \times \Delta t$$

辺BCからの流入量

$$\rho w_b w_b \times \Delta x \times 1 \times \Delta t$$

辺DAからの流出量

$$\rho w_d w_d \times \Delta x \times 1 \times \Delta t$$



2012年4月13日金曜日

3.3 運動量保存の式

「 Δt 時間に閉じられた領域内に流(出)入する運動量と

力積の和は内部の運動量の増加量に等しい」

$$\begin{aligned} (\rho w_e(t + \Delta t) - \rho w_e(t)) \times \Delta x \times \Delta z &= (\rho w_a u_a - \rho w_c u_c) \times \Delta z \times \Delta t \\ &+ (\rho w_b w_b - \rho w_d w_d) \times \Delta x \times \Delta t \\ \text{両辺を } \Delta x \times \Delta z \times \Delta t \text{ で割る} & \\ \frac{\rho w_e(t + \Delta t) - \rho w_e(t)}{\Delta t} &= \frac{\rho w_a u_a - \rho w_c u_c}{\Delta x} + \frac{\rho w_b w_b - \rho w_d w_d}{\Delta z} + \frac{p_b - p_d}{\Delta z} - \rho g \end{aligned}$$

$\Delta t, \Delta x, \Delta z$ を限りなく小さくし、微分表示

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \text{運動量保存の式—z方向成分}$$

2012年4月13日金曜日

3.2 運動量の保存

「 Δt 時間に閉じられた領域内に流(出)入する運動量と

力積の和は内部の運動量の増加量に等しい」

作用する力積

辺BCに圧力による力積—上向き

$$p_b \Delta x \times 1 \times \Delta t$$

辺ADに圧力による力積—下向き

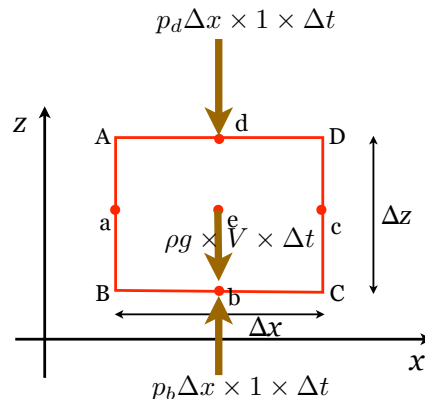
$$p_d \Delta x \times 1 \times \Delta t$$

領域に重力による力積—下向き

$$\rho g \times \Delta x \times \Delta z \times 1 \times \Delta t$$

作用する力積

$$(p_b - p_d - \rho g \Delta z) \Delta x \times \Delta t$$



2012年4月13日金曜日

3.4 オイラーの運動方程式

$$\begin{aligned} \text{数学的に変形} \quad \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \rho w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \\ \text{連続式より } &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

z(鉛直)方向の
オイラーの運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

x(水平)方向の
オイラーの運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

連続式

2012年4月13日金曜日

4.1 速度ポテンシャル—定義と条件

定義 速度ポテンシャル $\phi = \phi(x, z, t)$ 単位 m^2/s

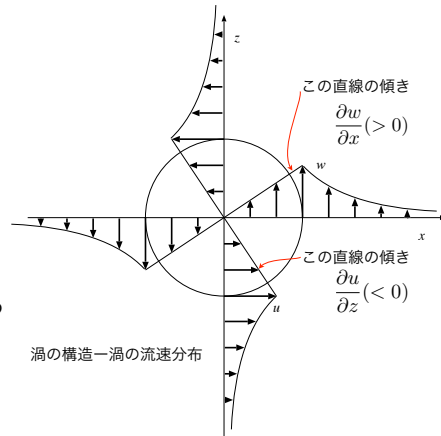
$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

速度ポテンシャル ϕ が決まると
水平方向流速成分 u も
鉛直方向流速成分 w も定まる
→ 変数が一つ減る

条件 — 渦無し流れの条件

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

物理的に渦がない条件
どこでもいつでもこの式が成り立つ
速度ポテンシャルはこの条件が成り立つ



2012年4月13日金曜日

4.2 速度ポテンシャルによる基礎式-2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{オイラーの運動方程式に} \\ \text{速度ポテンシャルと} \\ \text{渦無し流れの条件を適用} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array}$$

{ · } の値は x 方向にも z 方向にも一定

非定常ベルヌーイ式 (圧力方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

2012年4月13日金曜日

4.2 速度ポテンシャルによる基礎式-1

連続式に

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

速度ポテンシャルの定義 $\phi = \phi(x, z, t)$ 単位 m^2/s
を代入 \Leftarrow 渦無し流れを仮定している

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

元は連続式
流体中ならいつでも、どこでも成り立つ
未知数 ϕ 一つ \Leftrightarrow 式一つ
この式だけで解くことができる

2012年4月13日金曜日

5 非定常流れの基礎式 まとめ

未知数 流速の水平、鉛直成分 u, w 圧力 p

ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

1. 元は連続式
2. 渦無し流れを仮定
3. 任意点、任意時刻で成立
4. 未知数 ϕ の解が分かる

非定常ベルヌーイ式 (圧力方程式)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

1. 元は運動方程式
2. 渦無し流れを仮定
3. 任意点、任意時刻で成立
4. ϕ が決まれば、圧力 p が分かる

速度ポテンシャルの定義

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

1. ϕ が決まれば、流速 u, w が分かる

2012年4月13日金曜日