

1 波のエネルギーとその伝達率

1.1 位置エネルギー

1. 断面積 $dx \times 1$ の水の柱の持つ位置エネルギー dE_{p1} を計算する。

微小体積の流体の位置エネルギーの原点を静水面とする。

$$dE_{p1} = \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz dx = \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2) dx$$

2. 波のない状態での水の柱の持つ位置エネルギー dE_{p2} は

$$dE_{p2} = \int_{-h}^0 \rho g z dz dx = -\frac{1}{2} \rho g h^2 dx$$

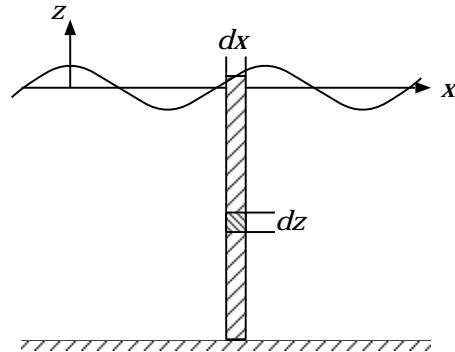
3. 波のない状態を波の持つ位置エネルギーの原点とすると波の位置エネルギー dE_p は

$$dE_p = dE_{p1} - dE_{p2} = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dx$$

4. 波の1波長にわたる平均をとる
 \Rightarrow 単位水表面積当りの平均位置エネルギー E_p

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{L} \int_0^L dE_p = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \end{aligned}$$

水面を上空から見たときの単位面積当たりの平均的な波のエネルギー



1.2 運動エネルギー

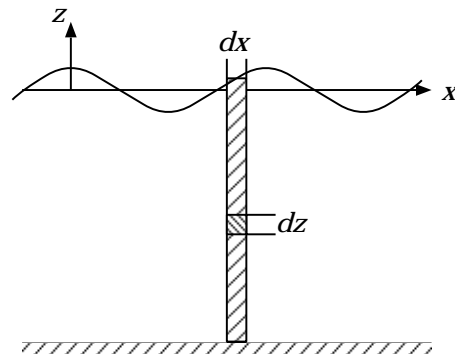
$dx dz \times 1$ の微小体積の持つエネルギー dE_k

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dx dz$$

水底から水面 (実は $z = 0$) まで積分し, 波の1波長にわたる平均をとる

\Rightarrow 単位水表面積当りの平均運動エネルギー E_k

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \cdot \left\{ \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz \right\} \\ &= \frac{1}{16} \rho g H^2 \end{aligned}$$



1.3 波の全エネルギー

単位水表面あたりの波が持つ平均のエネルギー E

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{8}\rho g H^2$$

波のエネルギーは波高だけで決まる．

⇒ 波のないところは波のエネルギーはない

⇒ 波のエネルギーのないところは波はない

波は伝播し，波のないところへ伝わっていく．

⇒ 波のエネルギーも伝わる．

⇒ 波のエネルギーが波自身によって運ばれる．

微小振幅波はエネルギーを運ぶのか？

2 エネルギーの伝達率

2.1 波によるエネルギーの輸送

エネルギー伝達率 ⇒ 波が単位時間当りに運ぶエネルギー量の平均値
水底から水面までの検査断面を考える．波は図の左から右へ進んでいるものとする．
検査断面の左から右の領域へ微小時間 dt の間に運び込まれるエネルギー

単位体積当たりの流体がもつエネルギー

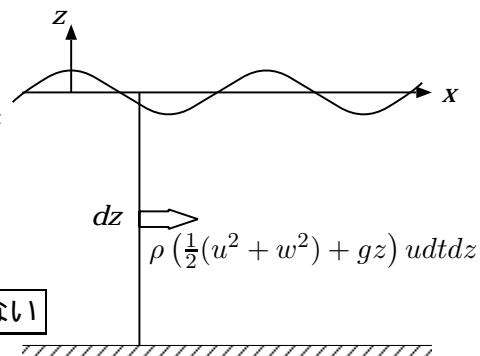
$$\rho \left(\frac{u^2 + w^2}{2} + gz \right)$$

が任意の深さにおいて，高さ dz ，単位幅当り $udt \cdot dz \times 1$ だけ運び込まれる．したがって微小時間 dt の間のエネルギーの流入量は

$$\rho \left(\frac{u^2 + w^2}{2} + gz \right) u dt dz$$

1 周期当りの平均をとると 0

⇒ 水粒子の運動によってエネルギーは輸送されない



2.2 波による仕事率

検査断面の左側の水は圧力によって右側の水を押ししている。

⇒ 左側の水が右側の水に仕事をしている。高さ dz 、奥行き単位長さ当たりについて力 $p dz \times 1$ で微小時間 Δt の間に $u \Delta t$ だけ左側の水が右側の水を押し込む。

検査断面全体では

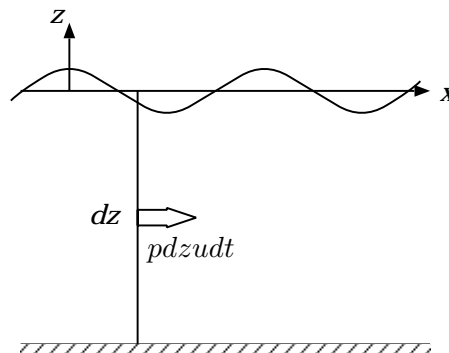
$$\int_{-h}^0 u \Delta t (p_d - \rho g z) dz$$

1 周期当りの平均をとると

$$W = \frac{\rho g H^2}{8} \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\}$$

⇒ 波のエネルギーは圧力がする仕事によって輸送される

ここで W を エネルギー伝達率 と呼ぶ。



2.3 群速度とエネルギー伝達率

W を書き換えてみる。

$$C_g = C \times \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\}$$

あるいは

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\} \Rightarrow C_g = Cn$$

とおくと

$$W = EC_g = ECn$$

エネルギー伝達率 ⇒ 波が単位時間当りに運ぶエネルギー量の平均値

エネルギー E ⇒ 単位水表面積当りに波が持っている平均的エネルギー

C_g ⇒ 波のエネルギーが波によって運ばれる速度

C_g ⇒ 群速度 と呼ぶ

長波の領域では $C_g = C$

深海では群速度 C_g は波速 C の $\frac{1}{2}$

3 群速度

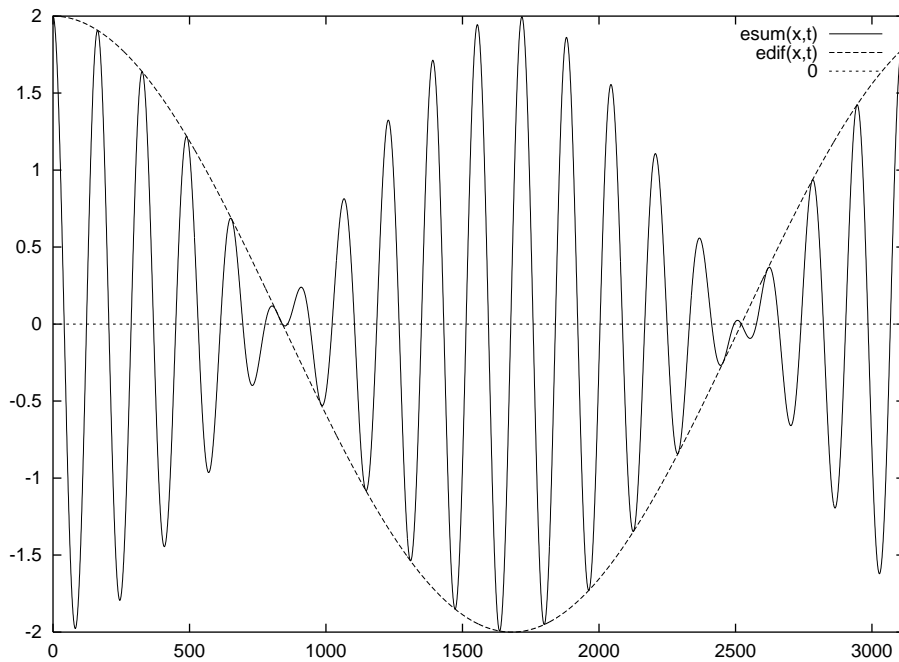
3.1 波群の伝播

角周波数が少しだけ異なる二つの波の合成を考える。

一つは角周波数 σ 、波数 k とする。もう一つは角周波数 $\sigma + \delta\sigma$ 、波数 $k + \delta k$ の波とする。もちろん、それぞれの角周波数と波数は分散関係式を満たしている。振幅はともに 1 であるとする。また水深は h であるとする。

この二つの波を合成すると次のような水位変動が得られる。

$$\begin{aligned}\eta_G &= \cos(kx - \sigma t) + \cos\{(k + \delta k)x - (\sigma + \delta\sigma)t\} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\sigma}{2}t\right) \cos\left(\frac{2k + \delta k}{2}x - \frac{2\sigma + \delta\sigma}{2}t\right)\end{aligned}$$



3.2 波群の伝播速度

$$\begin{aligned}\eta &= \cos(kx - \sigma t) = \cos\left(k\left(x - \frac{\sigma}{k}t\right)\right) = \cos(k(x - Ct)) \\ \eta_G &= 2 \cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\sigma}{2}t\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\delta k}{2}\left(x - \frac{\delta\sigma}{\delta k}t\right)\right)\end{aligned}$$

波群の伝播速度 C_g は

$$C_g = \frac{\delta\sigma}{\delta k} = \frac{d\sigma}{dk}$$

で与えられる。

通常微分と考えると、 σ が k の関数とみなし、分散関係式を k で微分する。

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= gk \tanh kh \\ 2\sigma \frac{d\sigma}{dk} &= g \tanh kh + gkh \frac{1}{\cosh^2 kh} \\ &= g \tanh kh \left(1 + kh \frac{1}{\sinh kh \cosh kh} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{k} \left(1 + kh \frac{1}{\sinh kh \cosh kh} \right)\end{aligned}$$

両辺を 2σ で割る。

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{\sigma}{k} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \tag{1}$$

したがって、群速度 C_g は

$$C_g = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$