海岸水理学 第4回目

担当 後野

目 次

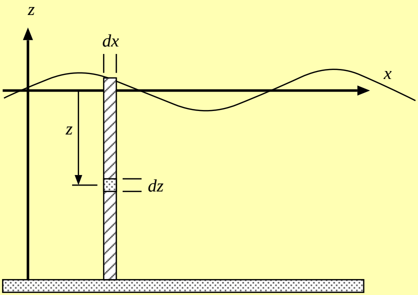
1　波のエネルギーとエネルギー伝達率

波の持つエネルギー E

水面を上から見たときの単位面積の水柱 (水面から水底まで) が持つ、平均的なエネルギー

波の位置エネルギー E_p と波の運動エネルギー E_k の和

1.1 波の位置エネルギー



※波のない状態を波の位置エネルギーの原点とする。

- 断面積 $dx \times 1$ の水柱の水としての位置エネルギー dE_{p1}

$$dE_{p1} = \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz dx = \frac{1}{2}\rho g(\eta^2 - h^2)dx$$

- 波のない状態での水柱の水としての位置エネルギー dE_{p2} は

$$dE_{p2} = \int_{-h}^{0} \rho g z dz dx = -\frac{1}{2}\rho g h^2 dx$$

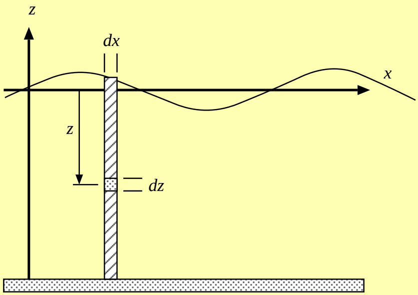
- 水柱の波としての位置エネルギー dE_p は

$$dE_p = dE_{p1} - dE_{p2} = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 dx$$

- 波の１波長分の平均をとる。
  $\Longrightarrow$ 単位水表面積当たりの波の平均位置エネルギー E_p

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{L}\int_0^L dE_p = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\rho g \eta^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\rho g a^2 = \frac{1}{16}\rho g H^2
\end{aligned}
$$

1.2　運動エネルギー



微小体積 $(dz \times dx \times 1)$ の水の持つ運動エネルギー

$$\frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)dzdx$$

水底から水面 (実は $z = 0$) まで積分し、水柱のもつ運動エネルギー dE_k を求める。

$$dE_k = \int_{-h}^{0} \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)dzdx$$

波の１波長分の平均をとる $\Longrightarrow$ 単位水表面積当たりの波の平均運動エネルギー E_k

$$\begin{aligned} E_k = \quad &= \frac{1}{L}\int_0^L dE_k = \frac{1}{L}\int_0^L \left(\int_{-h}^{0} \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)dz \right) dx \\ &= \frac{1}{4}\rho g a^2 = \frac{1}{16}\rho g H^2 \end{aligned}$$

1.3　波の全エネルギー

単位水表面積当たり、波の持つ平均エネルギー E は

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}\rho g a^2 = \frac{1}{8}\rho g H^2$$

波のエネルギーは波高 H のみで決まる。
$\Longrightarrow$ 波のないところは波のエネルギーはない
$\Longrightarrow$ 波のエネルギーのないところには波はない。

波は伝播し、波のない水面にも波は伝わっていく。
$\Longrightarrow$ 波のエネルギーも伝わる。
$\Longrightarrow$ 波自身が波のエネルギーも運んでいく。

1.4　波の伝達エネルギー

流れの中でのエネルギーの流れ

$\longrightarrow$ 定常ベルーイの定理を誘導するときの流入・流出するエネルギー

- 流れによるエネルギーの輸送
- 圧力による仕事

$\Longrightarrow$ 波も流れの一つであるから、上の２種類の働きによるエネルギーの伝達がある。

$\Longrightarrow$ 適当な鉛直断面を通過するエネルギーの流れの時間平均を考える。

この鉛直断面を検査断面と呼ぶ

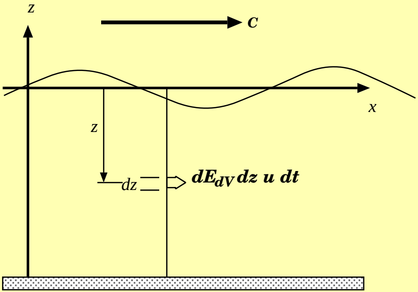
波の進行方向に、この断面を通過する単位時間当たりの平均エネルギー量

波の伝達エネルギー

：波が単位時間あたりに運ぶエネルギー量の平均値

：エネルギーは波の進行方向に運ばれる。

1.4.1　流れによるエネルギー輸送



微小時間 dt の間に断面の左から右へ運び込まれる水の体積は、高さ dz, 単位奥行きについて udt だけ、つまり $udtdz \times 1$。この体積の水とともに運び込まれるエネルギーは量は、単位体積の水の持つエネルギー dE_{dV} を用いて

$$dE_{dV}udtdz = \left\{\frac{1}{2}\rho\left(u^2 + w^2\right) + \rho gz\right\}udtdz$$

1 周期当りの平均をとると　　0

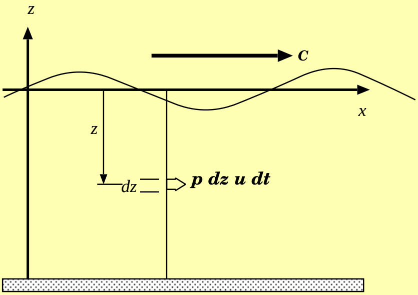
になる。$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{水粒子の運動によってエネルギーは輸送されない}}$

1.4.2　波の変動圧力による仕事率

検査断面の左側の水は圧力によって右側の水を押している．

$\Longrightarrow$ 左側の水が右側の水に仕事をしている．

高さ dz, 奥行き単位長さ当りについて力 $pdz \times 1$ で微小時間 Δt の間に $u\Delta t$ だけ左側の水が右側の水を押し込む.



検査断面全体では

$$\int_{-h}^{0} u\Delta t (p_d - \rho g z) dz$$

1 周期当りの平均をとると

$$W = \frac{\rho g H^2}{8} \cdot \frac{\sigma}{k} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right\}$$

$\Longrightarrow$ 波のエネルギーは圧力がする仕事によって輸送される

ここで W を エネルギー伝達率 と呼ぶ.

1.4.3 群速度とエネルギー伝達率

W を書き換えてみる.

$$C_g = C \times \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right\}$$

あるいは

$$n = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right\} \Longrightarrow C_g = Cn$$

とおくと

$$W = EC_g = ECn$$

エネルギー伝達率 $\Longrightarrow$ 波が単位時間当りに運ぶエネルギー量の平均値

エネルギー $E \Longrightarrow$ 単位水表面積当りに波が持っている平均的エネルギー

$C_g \Longrightarrow$ 波のエネルギーが波によって運ばれる速度

$C_g \Longrightarrow$ 群速度 と呼ぶ

長波の領域では $C_g = C$

深海では群速度 C_g は波速 C の $\frac{1}{2}$

2　群速度

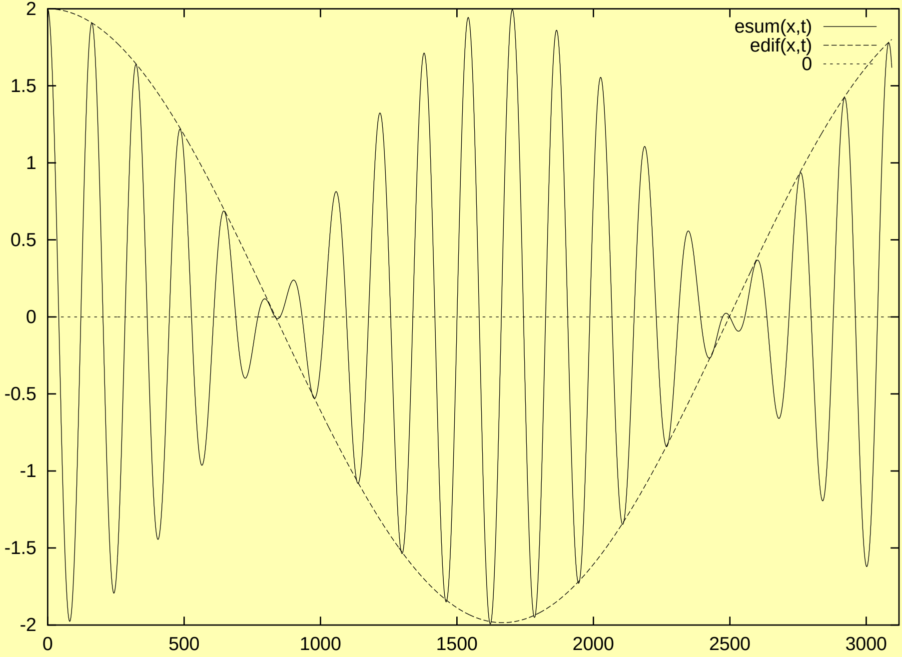
2.1　波群の伝播

角周波数が少しだけ異なる二つの波の合成を考える。

一つは角周波数 σ、波数 k とする。もう一つは角周波数 $\sigma+\delta\sigma$、波数 $k+\delta k$ の波とする。もちろん、それぞれの角周波数と波数は分散関係式を満たしている。振幅はともに 1 であるとする。また水深は h であるとする。

この二つの波を合成すると次のような水位変動が得られる。

$$\begin{aligned}\eta_G &= \cos(kx-\sigma t)+\cos\{(k+\delta k)x-(\sigma+\delta\sigma)t\}\\ &= 2\cos\left(\frac{\delta k}{2}x-\frac{\delta\sigma}{2}t\right)\cos\left(\frac{2k+\delta k}{2}x-\frac{2\sigma+\delta\sigma}{2}t\right)\end{aligned}$$


esum(x,t)
edif(x,t)
0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

2.2　波群の伝播速度

$$\eta = \cos(kx - \sigma t) = \cos\left(k\left(x - \frac{\sigma}{k}t\right)\right) = \cos\left(k(x - Ct)\right)$$

$$\begin{aligned}\eta_G &= 2\cos\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\sigma}{2}t\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{\delta k}{2}\left(x - \frac{\delta\sigma}{\delta k}t\right)\right)\end{aligned}$$

波群の伝播速度 C_g は

$$C_g = \frac{\delta\sigma}{\delta k} = \frac{d\sigma}{dk}$$

で与えられる。

通常の微分と考えて、σ が k の関数とみなし、分散関係式を k で微分する。

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= gk\tanh kh \\
2\sigma\frac{d\sigma}{dk} &= g\tanh kh + gkh\frac{1}{\cosh^2 kh} \\
&= g\tanh kh\left(1 + kh\frac{1}{\sinh kh\cosh kh}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{k}\left(1 + kh\frac{1}{\sinh kh\cosh kh}\right)
\end{aligned}
$$

両辺を 2σ で割る。

$$
\frac{d\sigma}{dk} = \frac{\sigma}{k}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \tag{1}
$$

したがって、群速度 C_g は

$$
C_g = C\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)
$$