微分方程式 中間テスト 第1回 <Kセット> 解答例 (真貝)

1

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$.

(b) 感染者数 x を時間の関数 $x(t)$ とする。

$$\frac{dx}{dt} = k \quad (k:\text{定数})$$

(c) 加速度は 位置 x を時間 t で 2階微分したもの なので

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k|x| \quad (k:\text{定数})$$

(d) 毎秒 同じだけ 体積が増加する。

$$\Delta V = V(r+\Delta r) - V(r) = \frac{4}{3}\pi\{(r+\Delta r)^3 - r^3\} \fallingdotseq \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \Delta r$$

(Δr の 2次以上の項を無視した)。

これより $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = k$ (一定)

という式を考えると、

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\pi r^2 \frac{\Delta r}{\Delta t} = k$$

すなわち r の変化率を微分方程式として考えると $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{k}{4\pi r^2}$ となる。

2 (みたすことを示せ. なので解かなくて良い)

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$
$$y'(t) = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$
$$y''(t) = -\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t = -\omega^2 y$$

したがって 与式は示された。

3 C を積分定数とする。

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x$

$$\therefore\ y = \int 4x\,dx = \underline{2x^2 + C}$$

(b) 変数分離法により

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 4x\,dx$ と変形すると、

$$\log|y| = 2x^2 + C$$
$$\therefore\ y = e^{2x^2+C} = \underline{C_1 e^{2x^2}}$$

(c) 変数分離法により

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 5\,dx$$
$$\log|y| = -5x + C$$
$$\therefore\ y = e^{-5x+C} = C_1 e^{-5x} \quad (\text{一般解})$$

初期条件 $y(0) = 2$ を代入すると

$2 = C_1$ となる

故に $y = \underline{2e^{-5x}}$

(d) 未定係数法.

Step1 右辺をゼロとした同次式

$y' + 5y = 0$

の一般解は (c) で得られた

$y = Ce^{-5x}$ ·····①

である。

Step2 特殊解として

$y_2 = ke^{5x}$

を仮定し、与式に代入すると、

$$(ke^{5x})' + 5(ke^{5x}) = 10e^{5x}$$

より $k = 1$ と決まる。

Step3 以上より 求める一般解は

$$y = \underline{Ce^{-5x} + e^{5x}}$$

(e) 未定係数法

Step1 前問と同じ

Step2 特殊解として

$y_2 = A\cos x + B\sin x$ ← 必ずペアで考える。

の形を仮定して与式に代入すると。

$$(A\cos x + B\sin x)' + 5A\cos x + 5B\sin x = 26\sin x$$
$$(-A + 5B)\sin x + (5A + B)\cos x = 26\sin x.$$

$$\therefore\ \begin{cases} -A + 5B = 26 \\ 5A + B = 0 \end{cases} \quad \text{これより} \quad \begin{matrix} A = -1 \\ B = 5 \end{matrix}$$

Step3 以上より 一般解は

$$y = \underline{Ce^{-5x} - \cos x + 5\sin x}$$

(f) 未定係数法

Step1 前問と同じ

Step2 特殊解として

$y_2 = kxe^{-5x}$ ← ①と同じ形はX

の形を仮定して与式に代入

$$(kxe^{-5x})' + 5kxe^{-5x} = 2e^{-5x}$$
$$(k - \cancel{5kx})e^{-5x} + \cancel{5kx}\,e^{-5x} = 2e^{-5x}$$

$\therefore\ k = 2$

Step3 以上より 一般解は

$$y = Ce^{-5x} + 2xe^{-5x} = \underline{(2x + C)e^{-5x}}$$

〈注〉 それぞれ積分因子法でも解ける。

(f)の別解を示す。

e^{5x} を与式の両辺に乗じると、

$$e^{5x}(y' + 5y) = 2$$
$$\Leftrightarrow\ (ye^{5x})' = 2$$

積分すると $ye^{5x} = 2x + C$

$$\therefore\ y = \underline{(2x + C)e^{-5x}}$$

4

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) \quad \cdots\cdots ①$$

変数分離法により

$$\int \frac{dT}{T-20} = -\int k\,dt$$
$$\log|T - 20| = -kt + C_1$$
$$\therefore\ T - 20 = e^{-kt+C_1}$$
$$\therefore\ T(t) = 20 + Ce^{-kt} \quad \cdots\cdots ②$$

と一般解が求められる。

初期条件

$T(0) = 80 = 20 + Ce^{-k\cdot 0}$ より

$C = 60$ と決まる。 ·····③

また、$t = 3$ のとき $T = 60$ より ② に代入して

$$60 = 20 + 60e^{-3k}$$
$$\therefore\ e^{-3k} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ③'$$

これより k も決まる。

結局 ②は

$$T(t) = 20 + 60e^{-kt}, \quad \text{ただし } e^{-3k} = \frac{2}{3}$$

求めるのは $t = 6$ のとき

$$T(6) = 20 + 60e^{-6k} = 20 + 60(e^{-3k})^2 = 20 + 60\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \underline{46.67\ ℃}$$