微分方程式（1 年）2024 年度（2025 年 1 月 23 日）　期末定期試験問題（訂正あり 2025/1/24）

担当：真貝寿明・塚本勝俊　　対象：IS 科 IN 科 1 年　　参照可能物：なし

【重要】　別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 1　（自然現象のモデル化，20 点）
次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，**法線**の傾きが $\cosh x$ である曲線がみたす微分方程式.

(2) 原点からの距離の 2 乗に反比例する力で加速度が決まる物体の運動を示す微分方程式.

(3) 半径が r の円を，半径 $r+\Delta r$ に相似拡大したとき，面積 $S(r)$ がどれだけ増加するかを表す微分方程式.

(4) ある SNS では，広範囲に支持される投稿に対して，それを引用する投稿はそのときの投稿数の 2 乗に比例して増加するが，同時に時間経過によって半減期 T で半減していく．この投稿数の増減を表す微分方程式.

問題 2　（基本的な微分方程式，30 点）
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．初期条件が与えられているものは特殊解も求めよ．

(1) $y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' - 3y = 6e^{-3x},\ \ y(0) = 3$

(3) $y' - 3y = 2e^{3x},\ \ y(0) = 4$

(4) $y' - 3y = 10\cos x$

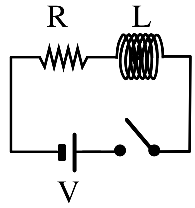
(5) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(6) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -4$

以下の３問のうち，２問を選択して解答せよ．

問題 3　（1 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗とインダクタンス L のコイルで構成される RL 直列回路に，起電力 V（一定）の直流電源を接続し，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる．電流 $I(t)$ に関する微分方程式は，

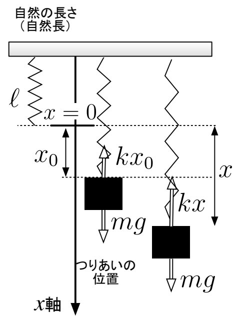


$$V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

となる． $I(t)$ を求め，グラフの概形を描け．

問題 4　（2 階微分方程式の応用，25 点）

鉛直面上で上下に振動するばねに取り付けられた物体の運動を考えよう．長さ ℓ のばねを天井に取り付け，鉛直に垂らす．ばねの最下点を原点とし，下向きに x 軸を取る．質量 m の物体を取り付けると，物体には鉛直下向きに重力 mg が働くとともに，ばねの伸びが x のときには弾性力 kx を受ける．重力と弾性力がつりあって，おもりが静止するとき，ばねの伸びを x_0 とすると，力のつりあいから $0 = mg - kx_0$，すなわち，$x_0 = mg/k$ が成り立つ．おもりが位置 x のときの運動方程式は，



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

である．

(1) 運動方程式の一般解を求めよ．

(2) 運動方程式の一般解より，振動の中心・振動の周期を求めよ．

問題 5　（微分方程式の概念，25 点）

(1) 関数の独立性の定義と判定方法を述べ，関数 $\sin x$ と $\cos x$ が独立な関数であることを示せ．

(2) 「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ．

(3) 次の文は微分方程式の分類である．空欄を埋めよ．
微分方程式は変数が１つしかない [(a)] 微分方程式と，変数が２つ以上ある [(b)] 微分方程式に分けられる．源項（source term）があるものを [(c)] 型微分方程式，ないものを [(d)] 型微分方程式とよぶ．１階の微分方程式については，[(e)] 法や [(f)] 法などの名前のついた解法があり，2 階の微分方程式では，[(g)] 法や [(h)] 法などの解き方がある．ただし，すべての微分方程式が解析的に解けるとは限らない．そのときは数値的解法を検討することになる．

(4) 関数 $y(x)$ に対する 2 階の微分方程式が $y = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$ を解としてもつとき，その微分方程式の特性方程式は [(i)] となっているはずなので，もとの微分方程式は [(j)] とわかる．また，初期条件は $y(0) =$ [(k)], $y'(0) =$ [(ℓ)] で与えられていたこともわかる．