宇宙物理・数理科学研究室　　Astrophysics & Mathematical Sciences

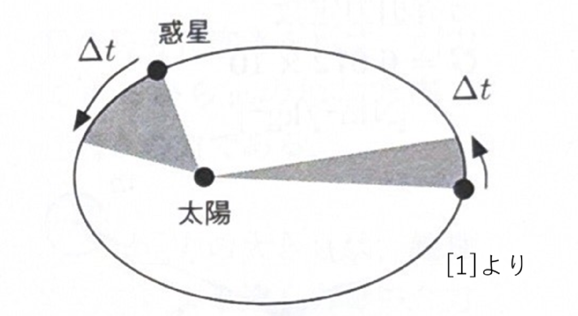
# ニュートンの法則からケプラーの3法則を導く

情報ゼミ（3年）文献報告レポート　C20-057　杉原圭亮

## • ケプラーの惑星の運動法則とニュートンの運動法則

惑星の運動はケプラーの3法則で表すことができる。ケプラーはブラーエの観測データから法則を導き出した。
3法則全てを表すことができる原理を考えた人物がいる。それがニュートンだ。本当に運動方程式からケプラーの3法則が出せるのか興味がわいたのでこれを調べた。

## • ケプラーの惑星の運動の3法則



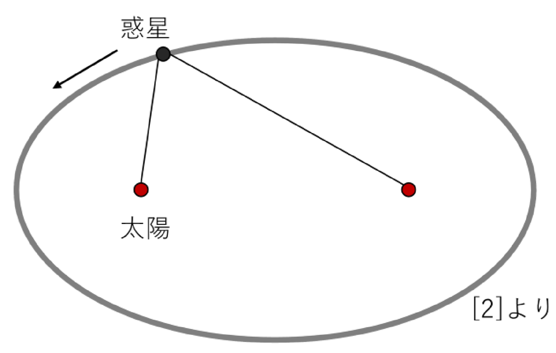
[1]より

- 第1法則
  楕円軌道の法則…惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描く
- 第2法則
  面積速度一定の法則…太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃く面積速度は惑星ごとに一定である
- 第3法則
  調和の法則…公転周期$T$の2乗と惑星の描く楕円の長軸半径$a$の3乗の比はすべての惑星で一定である

## • ケプラーはどのようにして惑星の運動法則を見つけたのか？

ティコ・ブラーエから火星の観測データをもらう　(1600年)
↓
観測データから計算で火星と地球の位置を求める
↓
計算結果から惑星の軌道が楕円であることがわかる
↓
惑星の速度が一定でないことも発見する　(1609年)
↓
調和の法則発見　(1619年)

## • 楕円軌道の法則（第1法則）

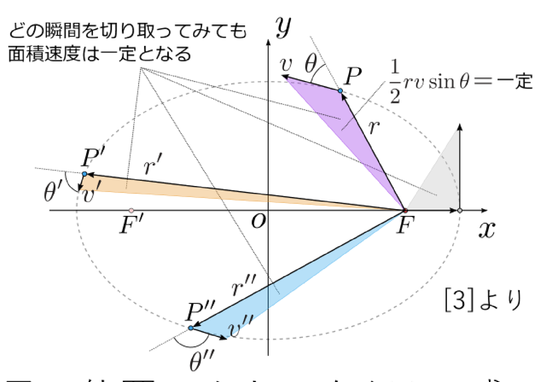


[2]より

惑星は太陽を焦点の1つとした楕円軌道を描く

ここからわかることとして、惑星の運動は太陽を含む同一の平面上の運動であることがわかる。

## • 面積速度一定の法則（第2法則）



[3]より

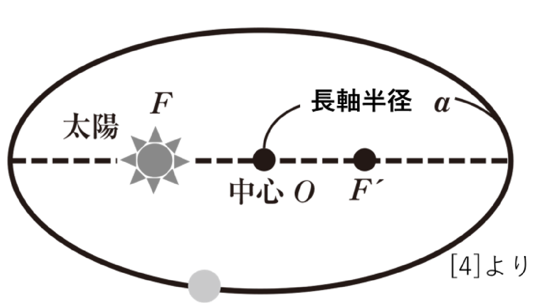
太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃く面積速度は惑星ごとに一定である

時刻$t$において焦点$F$にある太陽から見た惑星の位置ベクトルを$\vec{r}(t)$、惑星の速度ベクトルを$\vec{v}(t)$、$\vec{r}$と$\vec{v}$の成す角を$\theta$とすると面積速度$\frac{dS}{dt}$は

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}rv\sin\theta$$

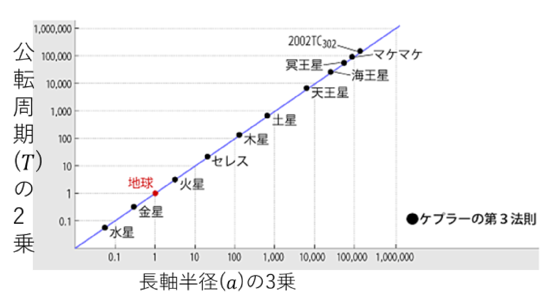
と表すことができる。この面積速度は、常に一定になる。

## • 調和の法則（第3法則）



[4]より

公転周期$T$の2乗と惑星の描く楕円の長軸半$a$の3乗の比はすべての惑星で一定である



[5]より

公転周期の2乗と長軸半径の3乗の比が一定のため太陽から遠くに行くほど公転周期が長くなることがわかる

## • ニュートンの運動方程式について

運動方程式とは、質量$m$の物体に力$\vec{F}$が加わると加速度$\vec{a}$が生じる法則で

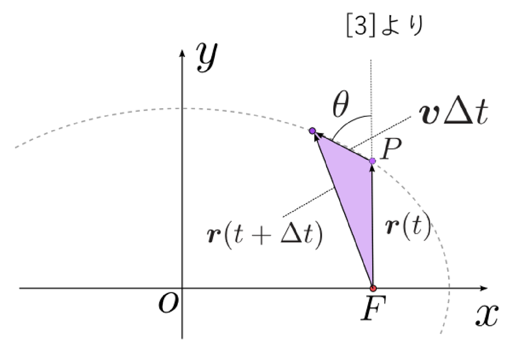
$$\vec{F}=m\vec{a}$$

万有引力とは、質量$M$と質量$m$の物体が距離$r$離れているとき物体間にかかる力$F$は、

$$F=G\frac{Mm}{r^2}\quad（Gは万有引力定数）$$

ニュートンは、万有引力が存在し、この力が惑星の運動を説明すると考えた

## • 面積速度一定の法則（第2法則）の導出



[3]より

第2法則は、角運動量保存則と等価である

> 角運動量保存則
> 位置$\vec{r}$と運動量$m\vec{v}$の外積(角運動量$\vec{L}$)が時間にかかわらず一定である
> $$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}\qquad |\vec{L}|=mrv\sin\theta$$

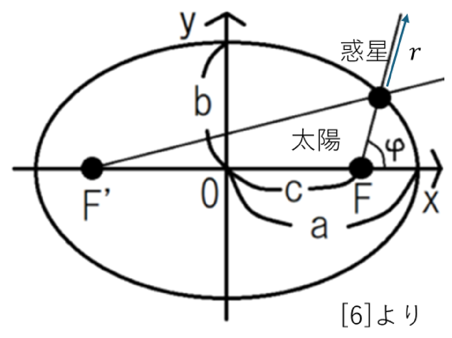
一方、$t$から$t+\Delta t$までの微小時間で描かれる面積を考えると

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}rv\sin\theta\Delta t$$

と考えることができ、両辺$\Delta t$で割り、$\Delta t\to 0$にすると$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}rv\sin\theta$となり、これを角運動量を使って表すと$\frac{L}{2m}$となる。第2法則は角運動量保存則と等価であることがわかる

## • 楕円軌道の法則（第1法則）の導出

惑星の運動を$xy$座標ではなく、$r\varphi$座標（極座標）で考える。
$r$は動径方向、$\varphi$は接線方向とする。



[6]より

それぞれの方向に運動方程式をたてると

$$F_r=m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\quad\cdots①$$
$$F_\varphi=m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]\quad\cdots②$$

太陽を中心と考えると、$F_\varphi=0$、$F_r=-G\frac{Mm}{r^2}$

ここで、惑星には太陽からの引力しか働かないと仮定できるので接線方向にかかる力$F_\varphi$は0になる。これより②から

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=h\ （一定）$$

エネルギー保存則に当てはめた$F_r$と$F_\varphi$、$h$を利用し運動方程式①を解くと

$$r=\frac{h^2/_{GM}}{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2mM^2}}\cos(\varphi-\alpha)}$$

となり、これは

$$r=\frac{L}{1+e\cos(\varphi-\alpha)}\qquad（\alphaは積分定数）（h^2/_{GM}は定数なのでLとする）$$

となって、楕円を含む2次曲線を表す

## • 調和の法則（第3法則）の導出

ここで、公転周期$T$は面積$S$を面積速度$\frac{dS}{dt}$で割ったものである。

初めに惑星運動の楕円の面積を求める。短軸半径を$b$とすると、面積は$S=ab\pi$と表せる。よって$T=\frac{ab\pi}{\frac{L}{2m}}$

長軸半径と短軸半径の関係から$b$は$b=h\sqrt{\frac{a}{GM}}$とでき、これを代入すると

$T=\frac{2a\pi h}{L}\sqrt{\frac{a}{GM}}$となり、両辺2乗すると$T^2=a^3\frac{2\pi h}{L^2GM}$
よって成立する。

## • 最後に

- ケプラーの惑星運動の3法則をニュートンの万有引力と運動方程式から導き出すことができた。
- ケプラーがブラーエからもらった観測データから導き出した法則は正しかった

ことが分かった。

参考文献　[1]真貝寿明'徹底攻略微分積分'[2]ケプラーの第1法則(楕円の法則)：サラリーマン、宇宙を語る。 [3]ケプラーの法則｜高校物理の備忘録 [4]【高校物理】「ケプラーの第三法則」｜映像授業のTry IT (トライイット) [5]ホロスコープと配列の法則　｜　宝瓶宮占星学 [6]ケプラーの法則の概要と証明