

# 標準作業時間の不確実性を考慮したプロダクトミックス

中西 真悟

工学部 技術マネジメント学科

(2010年9月30日受理)

Product Mix based on Uncertainties of Standard Operation Time

by

Shingo NAKANISHI

Department of Technology Management, Faculty of Engineering

(Manuscript received September 30, 2010)

## 標準作業時間の不確実性を考慮したプロダクトミックス\*

中西 真悟\*\*

工学部 技術マネジメント学科

(2010年9月30日受理)

Product Mix based on Uncertainties of Standard Operation Time

by

Shingo NAKANISHI

Department of Technology Management, Faculty of Engineering

(Manuscript received September 30, 2010)

### Abstract

This study deals with uncertainties about the product mix in cost accounting when we must consider each uncertain standard operation time. It is important to think of deterministic linear programming for product mix as nonlinear programming based on uncertainties like hyperbolic curves instead of lines defined by constraints in several standard operation times. First, we point out that this product mix is defined as a nonlinear programming model for solving the upper and lower bounds of maximum operating profit. Second, we clarify that a simple method like sequential linear programming is useful for avoiding computation directly by several complex nonlinear programming methods. Under these conditions, we consider the characteristics of actual optimal solutions for practical operation time in order to make decisions effectively. We use charts to show some behaviors of optimal solution points.

キーワード； 原価計算, プロダクトミックス, 逐次線形計画法, 標準作業時間, 統計的不確実性

Keyword ; Cost Accounting, Product Mix, Sequential Linear Programming, Standard Operation Time,  
Stochastic Uncertainty

---

\* 第38回コンピュータと経営工学に関する国際会議で発表 (2008年11月1日, 北京航空航天大学)

\*\* 大阪工業大学 工学部 技術マネジメント学科

## 1. 緒 言

プロダクトミックス（セールスマックスとも呼ばれる。）は貢献利益が最大となるように生産・販売計画における生産比率とその数量を意思決定する。このため、プロダクトミックスにおける意思決定は、企業の貢献利益の最大化に影響を及ぼすので非常に重要である<sup>1)</sup>。

一般にプロダクトミックスは線形計画法を用いて計算することで知られている<sup>1)~4)</sup>。しかしながら、プロダクトミックスに基づく解法は所与の値を得た現実性を保証したモデルとして定式化されている。実際には、多くの生産・販売計画は様々な不現実な要因が所与の変数に影響を及ぼすと考えられる。このように考えると、プロダクトミックスもまた統計的不現実性を有するものとして取扱う必要がある。本研究では、制約条件の係数における不現実性がある場合として標準作業時間の影響を取扱っている。このとき、モデル化と解法は非線形計画法として定式化することにより計算できる。

ところで、非線形計画法は多くのケースが想定されるが<sup>5)</sup>、本研究では逐次線形計画法を簡易な解法として活用している<sup>6)</sup>。この解法を2次元モデルに限定すれば、Microsoft ExcelのSolver<sup>5)</sup>を用いると複雑な計算をしなくとも現場でも活用できて効果的である。また、Mathematica<sup>9)</sup>による最適化計算結果の検証とExcel上でのシミュレーションを通じて得られる解の傾向を用いて再考している。これらの数値結果から、最適解もまた不現実性を有していることを示している。そして、その傾向を照査して最適解の上界と下界を確認している。さらに、貢献利益の傾向と生産量の特徴について考察している。

## 2. 標準作業時間に基づくプロダクトミックス

### 2.1 プロダクトミックスモデル

標準作業時間を設定しているプロダクトミックス問題の例題として次のモデルを用いて解説する。

あるビデオデッキを生産する企業は、2つのタイプのビデオデッキを生産するものとしてプロダクトミックスに取組む<sup>2,3)</sup>。これらの販売価格と変動費用はTable 1に示されるとおりとする。このため販売価格から変動費用を差引くとそれぞれの単位生産量当りの貢献利益が計算できる。

このとき、解法の中では取扱わないが月次共通固定費用は7,240,000円であるものと見積もられている。2つのタイプであるスタンダードモデル（以下STモデルと呼ぶ）とデラックスモデル（以下DXモデルと呼ぶ）の生産比率を5：3に決定したときには、CVP（cost-volume profit）分析における損益分岐点により、それぞれの生産量はSTモデルが200台、DXモデルが120台の生産量であることがわかる<sup>2,3)</sup>。

Table 1 Selling price and variable cost of VCR<sup>2,3)</sup>

Per unit of VCR	ST	DX
Selling Price	500	600
Variable Cost	300	330
Operating Profit	200	270

(Unit : 100 yen)

さて、Table 2に示すように機械加工部と組立部の標準作業時間を考慮するとき、プロダクトミックスについて線形計画法を用いて解くためにモデル化する必要がある。そして、その他の制約条件として、DXモデルは月間生産台数を最大300台までとする。さらに、Table 3に示すように各部門の月間生産時間の上限が与えられている<sup>2,3)</sup>。

次節2.2では、図解法を用いたチャートの利用によりこの問題に関する線形計画法の定式化を示す<sup>2,3)</sup>。

Table 2 Each deterministic standard operation time<sup>2,3)</sup>

Division	ST	DX
Processing Div.	2 hours	2 hours
Assembly Div.	1 hours	2 hours

Table 3 Maximum capacities of number of monthly production<sup>2,3)</sup>

Division	ST	DX
Capacity	1400 hours	900 hours

## 2.2 プロダクトミックスモデルのための線形計画法

所与の数值が設定されるプロダクトミックスモデルの線形計画法は、Table 1, 2, 3 から、以下のよう  
に定式化できる。すなわち

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f = 200x_1 + 270x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 1400 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 900 \\
 & x_2 \leq 300 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

である<sup>2,3)</sup>。ここに、 $x_1$  はSTモデルの標準作業時間に基づく生産量であり、同様に  $x_2$  はDXモデルの生産量である。目的関数  $f$  は上記のTable 1 の貢献利益を用いて計算する一次関数であり、 $x_1$  と  $x_2$  により作成される。

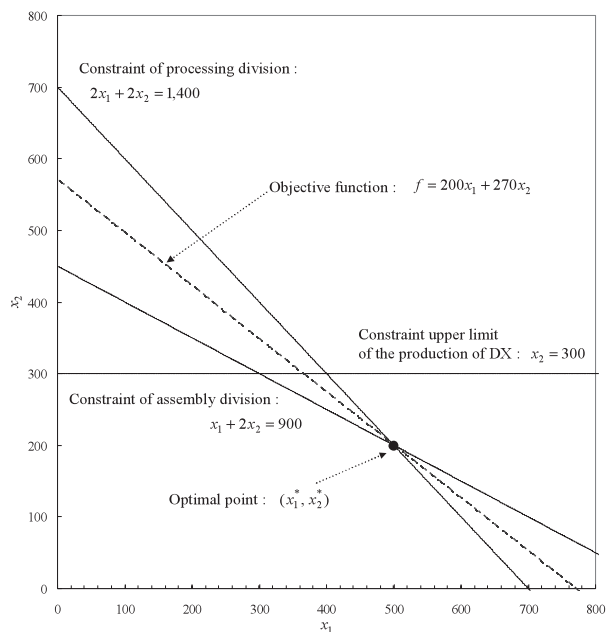


Fig. 1 Deterministic product mix decision model using traditional linear programming chart<sup>2,3)</sup>

この条件下でFig. 1 に示す最適解の点は視覚化できるので数理的に線形計画法を探索して解くことな

く図解法を用いて求めることができる。しかしながら一般的にはこの他のケースの場合の意思決定にはシンプレックス法のような解法を用いる方が効果的であるといえる<sup>8)</sup>。Fig. 1 上の最適解は次のとおりである。すなわち

$$\begin{cases}
 f^* = 154000 & (100 \text{ yen}) \\
 x_1^* = 500 \\
 x_2^* = 200
 \end{cases} \tag{2}$$

である<sup>2,3)</sup>。このように解ける問題について、本研究で述べるモデルの拡張について説明するときの比較のために実際に他のケースにも適用できるように各条件が所与として確実な場合でのプロダクトミックス問題の数理的な定式化として一般式を次のとおり記述しておく。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f = c_1x_1 + c_2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

## 2.3 不確実な標準作業時間の導入

Table 2 では、所与の条件が確実な場合におけるプロダクトミックスの標準作業時間を示していたが、本節では式(3)の制約条件式の係数に相当する標準作業時間の不確実性について考察する。たとえば、Table 4 に示すように機械加工部と組立部のそれぞれの標準作業時間の誤差が正規分布に従うものとして標準偏差 $\pm 0.05$ 時間(3分)だけ変動が認められる場合を想定する。

Table 4 Each stochastic standard operation time

Division	ST	DX
Processing Div.	$2 \pm 0.05$ hours	$2 \pm 0.05$ hours
Assembly Div.	$1 \pm 0.05$ hours	$2 \pm 0.05$ hours

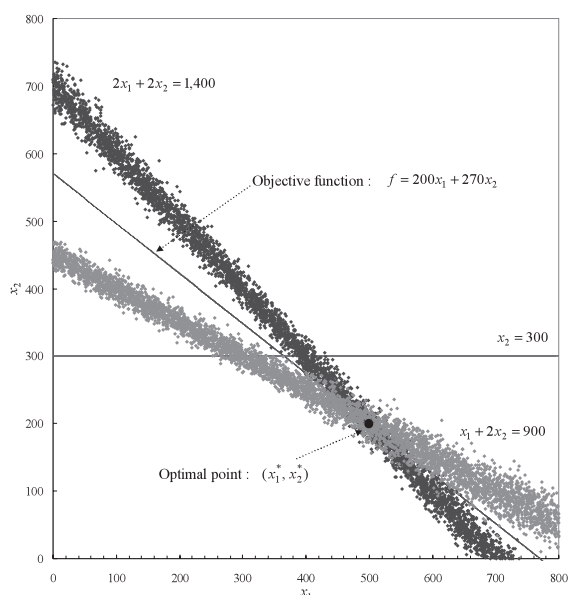


Fig. 2 Stochastic product mix decision model using traditional linear programming chart

このような変動は実際の工程では、プロダクトミックスの所与の条件下での設定値として生産計画通りに生産するときには、その工程が全自動化されていない場合には顕著に認められる。そこで、仮に Table 4 の変動を考慮する場合には、Fig. 2 に示されるように制約条件式の直線は不確実性を伴う傾向があることがわかる。Fig. 2 上のランダムな変動は制約条件式の係数の変動を標準偏差の 2 倍として機械加工部と組立部のそれぞれに加えて 5,000 回ずつランダムサンプリングした結果をプロットした傾向である。

Fig. 2 から、同時に最適解もまた 2 本の制約条件式の交点が標準偏差の大きさに基づいて変動することによる不確実性を有することがわかる。このため、プロダクトミックスによる評価を行うためには、実際には標準作業時間の統計的な不確実性についても検討する必要がある。そこで、本研究では下記のことを確認している。

まず、制約条件式の不確実性の傾向を調べる必要がある。そのため、試行錯誤の数値実験の後に、標準偏差の大きさによる不確実性の傾向がこれら制約条件式には双曲線<sup>7)</sup>として拡張できることが確認できる。

次に、2 本の制約条件式に考慮されるそれぞれの双曲線の特徴を用いて、最適解より近い交点と遠い交点のそれぞれの交点は最適解の上界と下界として見積もることが可能である。その結果として、下記のモデル化が可能となる。

すなわち、Table 4 の条件を考慮した式(4)による線形計画問題の拡張モデルから Fig. 3 に示されるように式(5)に定義するモデルに再定義することができる。このとき、式(4)における  $\pm$  と  $\mp$  の符号は統計的不確実性を考慮した双曲線の漸近線の役割を果たす。すなわち、漸近線としてとらえる線形計画モデルの拡張は

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 200x_1 + 270x_2 \\ \text{s.t.} \quad & (2 \pm 2 \times 0.05)x_1 + (2 \mp 2 \times 0.05)x_2 \leq 1400 \\ & (1 \pm 2 \times 0.05)x_1 + (2 \mp 2 \times 0.05)x_2 \leq 900 \quad (4) \\ & x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

である。この式(4)から、非線形計画問題としてモデル化するためにプロダクトミックスが下式のように

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 200x_1 + 270x_2 \\ \text{s.t.} \quad & (2.1x_1 + 1.9x_2 - 1400)(1.9x_1 + 2.1x_2 - 1400) \geq 2450 \\ & (1.1x_1 + 1.9x_2 - 900)(0.9x_1 + 2.1x_2 - 900) \geq 1800 \\ & x_2 \leq 300 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5) \end{aligned}$$

と定義することができる。ここに式(5)の制約条件式の右辺の定数項 2450 と 1800 は式(4)に基づき下式の連立方程式を解いて算出された値である。

$$\begin{aligned} 2450 &= 2^2 \times (350^2 \times 0.05^2 + 350^2 \times 0.05^2) \\ \therefore \begin{cases} (2 + 2 \times 0.05)x_1 + (2 - 2 \times 0.05)x_2 = 1400 \\ (2 - 2 \times 0.05)x_1 + (2 + 2 \times 0.05)x_2 = 1400 \end{cases} \\ d_{11} &= x_1 = 350, d_{12} = x_2 = 350 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1800 &= 2^2 \times (300^2 \times 0.05^2 + 300^2 \times 0.05^2) \\ \therefore \begin{cases} (1 + 2 \times 0.05)x_1 + (2 - 2 \times 0.05)x_2 = 900 \\ (1 - 2 \times 0.05)x_1 + (2 + 2 \times 0.05)x_2 = 900 \end{cases} \\ d_{21} &= x_1 = 300, d_{22} = x_2 = 300 \quad (6) \end{aligned}$$

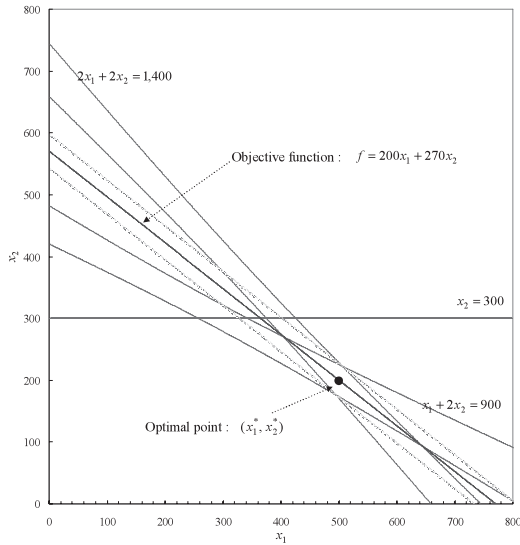


Fig. 3 Nonlinear programming as product mix decision model with uncertain standard operation time

このとき、式(5)の非線形計画問題はFig.3に視覚化された双曲線を制約条件式として有するモデルとして定義されている。したがって、不確実な標準作業時間によるプロダクトミックスの意思決定のために非線形計画モデルを解く必要がある。さらに、不確実性における変動を最適解の上界と下界の探索を行いその傾向について調べておく必要がある。

## 2.4 プロダクトミックスモデルのための非線形計画法の一般式によるモデル化

ここで、プロダクトミックスモデルの非線形計画問題のモデルの一般式での表現を記述する。すなわち、式(4)から式(6)に従い、他のケースにも応用できるように非線形計画モデルを一般式として記述しなおす。まず、式(4)は下式として定義する。

$$\begin{aligned} \max \quad & f = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & (a_{11} \pm \lambda\sigma_{11})x_1 + (a_{12} \pm \lambda\sigma_{12})x_2 \leq b_1 \\ & (a_{21} \pm \lambda\sigma_{21})x_1 + (a_{22} \pm \lambda\sigma_{22})x_2 \leq b_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $\lambda$ は標準作業時間の標準偏差 $\sigma_{ij}$ の1, 2, 3倍と変動幅を表す定数である。この考え方は品質管理や信頼性工学に管理水準として用いられるシグマの何倍まで考慮するかという意味決定の管理水準の意

味を兼ね備えている<sup>10)</sup>。このとき、これらの制約条件式は双曲線の漸近線として活用され、制約条件式の統計的不確実性を表現するときに重要な役割を果たす。

次に、式(5)は下式として記述される。すなわち、連立方程式が2本の漸近線の役割を果たす制約条件式から構成される場合を解くと、 $d_{ij}$ はその解となる。

$$\begin{cases} (a_{11} + \lambda\sigma_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda\sigma_{12})x_2 = b_1 \\ (a_{11} - \lambda\sigma_{11})x_1 + (a_{12} + \lambda\sigma_{12})x_2 = b_1 \\ x_1 = d_{11}, x_2 = d_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{21} + \lambda\sigma_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda\sigma_{22})x_2 = b_2 \\ (a_{21} - \lambda\sigma_{21})x_1 + (a_{22} + \lambda\sigma_{22})x_2 = b_2 \\ x_1 = d_{21}, x_2 = d_{22} \end{cases} \quad (8)$$

式(7)(8)から、式(6)を一般式として非線形計画問題のモデルに書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \max \quad & f = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & g_1 = \{(a_{11} + \lambda\sigma_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda\sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ & \quad \cdot \{(a_{11} - \lambda\sigma_{11})x_1 + (a_{12} + \lambda\sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ & \quad - \lambda^2(\sigma_{11}^2d_{11}^2 + \sigma_{12}^2d_{12}^2) \geq 0 \\ & g_2 = \{(a_{21} + \lambda\sigma_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda\sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ & \quad \cdot \{(a_{21} - \lambda\sigma_{21})x_1 + (a_{22} + \lambda\sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ & \quad - \lambda^2(\sigma_{21}^2d_{21}^2 + \sigma_{22}^2d_{22}^2) \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

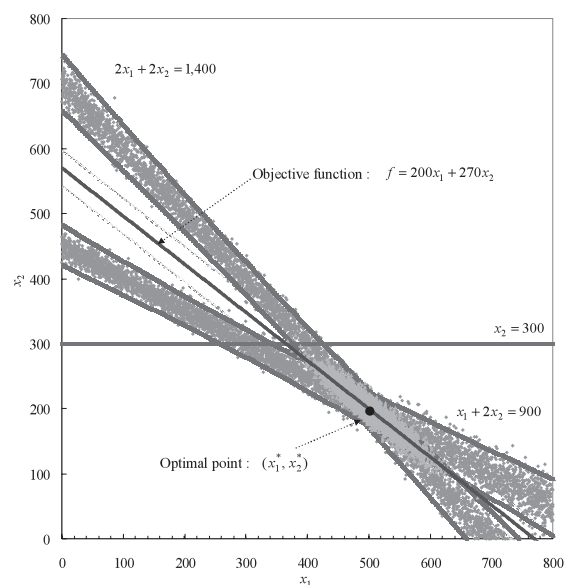


Fig. 4 Nonlinear programming as product mix decision model with uncertain standard operation time



## 2.5 不確実性を表現するファジィ線形計画法との比較

一方, Zimmermannは不確実な線形計画法にファジィ目標とファジィ制約を持つ問題を導入している<sup>8)</sup>. すなわち, 通常の線形計画問題である式(3)をマトリクス表記した

$$\begin{aligned} \max f &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\leq f \\ \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11)$$

と表わす<sup>8)</sup>. ここに,  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq f$  は目的  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$  をだいたい  $f$  以下にしたいというファジィ目標,  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$  は制約  $\mathbf{Ax}$  をだいたい  $\mathbf{b}$  以下にしたいというファジィ制約が与えられているモデル化であり, メンバーシップ関数を用いて意思決定者のあいまい性を考慮する点がファジィ線形計画法の特徴である<sup>8)</sup>.

これに対して, 本研究で提案するモデル化では制約条件は厳密に定数項  $\mathbf{b}$  以下を満たしながら現実問題に適応し, 標準作業時間の統計的不確実性に相当するばらつきの影響を受ける係数行列  $\mathbf{A}$  の偏差を表現していることでモデルとしての意味は異なっている. このため意思決定問題としても両者の取扱う方法は当然違ってくることを特記しておく. したがって, 本研究における手法は不確実性に対する新たなモデリングの提案とその解法を実践しているものと考えられる.

## 3. 不確実性に基づくプロダクトミックスモデルのための逐次線形計画問題

### 3.1 プロダクトミックスモデルのための逐次線形計画法の一般式によるモデル化

2章では本研究で考慮した統計的不確実性におけるプロダクトミックスの非線形計画問題としての定式化について提案している. 本章ではモデルの解を探索するために伝統的なプロダクトミックス問題の

線形計画問題を参考に逐次線形計画法<sup>6)</sup>を用いて実施する. 以下では, そのためのモデルの解の探索に必要な逐次線形計画法を適用する手順を示している.

まず, 目的関数に書き換えや変更はないのでそのまま

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (12)$$

と定義する. そして式(9)に記述した制約条件式

$$\begin{aligned} g_1 &= \{(a_{11} + \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ &\quad \cdot \{(a_{11} - \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} + \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ &\quad - \lambda^2 (\sigma_{11}^2 d_{11}^2 + \sigma_{12}^2 d_{12}^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \{(a_{21} + \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ &\quad \cdot \{(a_{21} - \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} + \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ &\quad - \lambda^2 (\sigma_{21}^2 d_{21}^2 + \sigma_{22}^2 d_{22}^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

もそのまま変更なく使用する. 式(12)における  $f$  は線形関数であるので問題はないが, 式(13)と式(14)は  $g_1$  と  $g_2$  が双曲線であることから, これらを一次近似して適用する. すなわち

$$\begin{aligned} g_i &= g_i(x_1, x_2) = g_i(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}) \\ &\quad + \frac{\partial g_i(x_1^{(j)}, x_2^{(j)})}{\partial x_1} (x_1 - x_1^{(j)}) \\ &\quad + \frac{\partial g_i(x_1^{(j)}, x_2^{(j)})}{\partial x_2} (x_2 - x_2^{(j)}) \end{aligned} \quad (15)$$

による近似直線として逐次線形計画法に活用する. ここに

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= (a_{11} - \lambda \sigma_{11})\{(a_{11} + \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ &\quad + (a_{11} + \lambda \sigma_{11})\{(a_{11} - \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} + \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= (a_{12} + \lambda \sigma_{12})\{(a_{11} + \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} - \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ &\quad + (a_{12} - \lambda \sigma_{12})\{(a_{11} - \lambda \sigma_{11})x_1 + (a_{12} + \lambda \sigma_{12})x_2 - b_1\} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= (a_{21} - \lambda \sigma_{21})\{(a_{21} + \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ &\quad + (a_{21} + \lambda \sigma_{21})\{(a_{21} - \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} + \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= (a_{22} + \lambda \sigma_{22})\{(a_{21} + \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} - \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \\ &\quad + (a_{22} - \lambda \sigma_{22})\{(a_{21} - \lambda \sigma_{21})x_1 + (a_{22} + \lambda \sigma_{22})x_2 - b_2\} \end{aligned} \quad (16)$$

と導くことができるのでExcelのSolverで計算する際に参照するセルに書き込んでおくと効果的である。

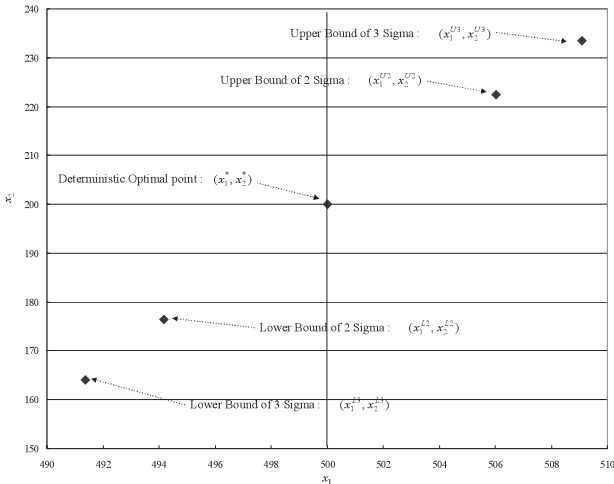


Fig. 5 Upper or lower bound of optimal solutions by sequential linear programming

2章で取扱った例題について、この近似式を適用して標準偏差の2倍および3倍におけるモデル化を設定し、最適解の下界は、生産計画問題の定式化と同様に最大化問題<sup>8)</sup>として、最適解の上界は栄養問題の定式化と同様に最小化問題<sup>8)</sup>としてモデル化し、その解を逐次線形計画法<sup>6)</sup>により探索できる。

その最適解の上下界の探索の計算後に、Fig. 5に示すように最適解の上界と下界を視覚化させてその特徴を調べることができる。この問題に関しては、最適解を探索する際にMicrosoft ExcelのSolver<sup>5)</sup>を用いて逐次線形計画法を解くと2次元問題のため、図解法のための作図上に解の探索の軌跡についても効果的に示すことができる。また、Mathematicaでモデル化すると容易に計算できるため、ExcelのSolverで求めた解の妥当性について再検証できる<sup>9)</sup>。

### 3.2 逐次線形計画法の探索手順<sup>6)</sup>

本研究で用いた一般的な逐次線形計画法のアルゴリズム<sup>6)</sup>を示すために一般式を用いてモデルを表記する。すなわち

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (17)$$

のモデルを設計点  $\mathbf{x}^{(j)}$  においてTaylor級数に展開し、その高次項を省略すると次式を得る。

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= g_i(\mathbf{x}^{(j)}) + \nabla g_i(\mathbf{x}^{(j)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}) \\ f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^{(j)}) + \nabla f(\mathbf{x}^{(j)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j)}) \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 $\nabla(\bullet)$  は設計点  $\mathbf{x}^{(j)}$  における関数  $(\bullet)$  の1次偏微分係数ベクトルであり、通常感度ベクトルと呼ばれている。式(18)は線形関数として表現されるため、 $j$  回目の探索により得られる解  $\mathbf{x}^{(j)}$  と  $j+1$  回目の探索により得られる解  $\mathbf{x}^{(j+1)}$  との誤差の絶対値  $|\mathbf{x}^{(j+1)} - \mathbf{x}^{(j)}|$  が微小な値のベクトル  $\epsilon$  以下になるまで反復計算をFig. 6のように繰り返す解法を用いている<sup>6)</sup>。

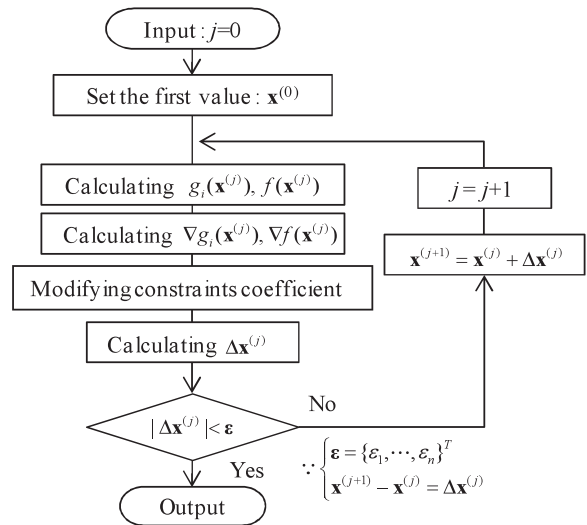


Fig. 6 Algorithm for sequential linear programming<sup>6)</sup>

## 4. 数値計算

Fig. 2から、最適解は制約条件式がランダムに変動するために統計的不確実性を有していることがわかる。同様に、Fig. 4に示すようにこの不確実なプロダクトミックス問題を5,000回のシミュレーションを実施してみたとき、Fig. 7に視覚化されるように最適解の統計的不確実性を得ることができる。



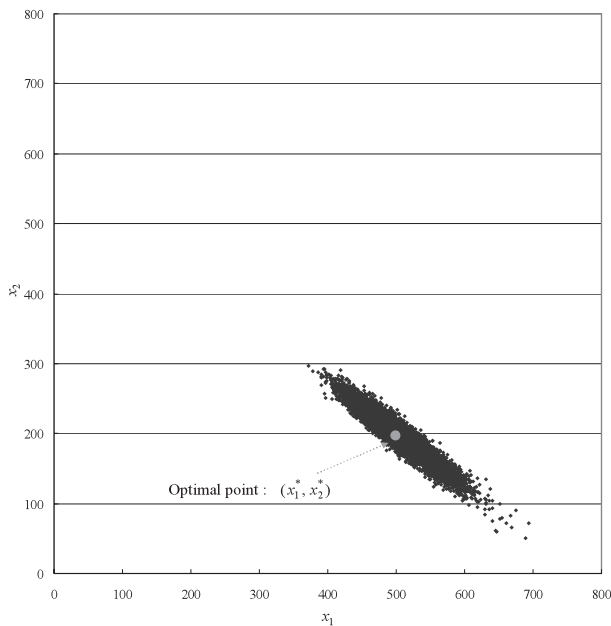


Fig. 7 Stochastic uncertainties of optimal points

これらの解の傾向からFig. 8 に貢献利益の解の傾向を分布としても示すことができる. このとき, 貢献利益の最適解の不確実な傾向もまた正規分布に従うことがわかる. すなわち, 式(5)の目的関数  $f$  は線形関数であり,  $x_1$  と  $x_2$  におけるそれぞれの制約条件の係数の影響による正規分布の誤差としての偏差を考慮した最適解の傾向は2次元正規分布の同時分布を構成するため,  $f$  の法線方向に視覚化した周辺分布に相当して正規分布に従っていることが確認できる.

そこで, 標準作業時間の標準偏差の2倍および3倍の幅で最適解の探索計算とシミュレーションを実施した結果をプロットしたものがFig. 9である. この結果から, シミュレーションの結果と逐次線形計画法の解の傾向はほぼ一致していることがわかる.

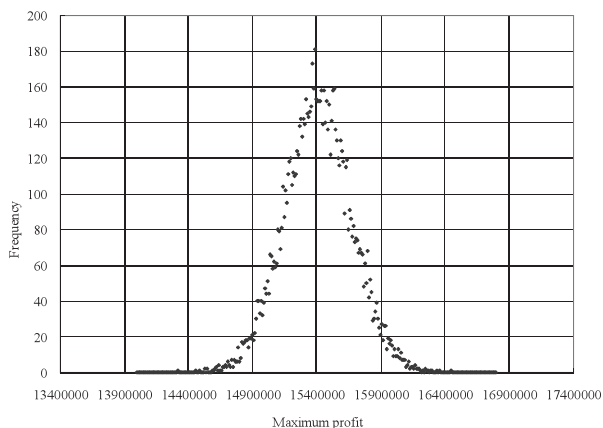


Fig. 8 Tendencies of stochastic uncertainties for maximum profit

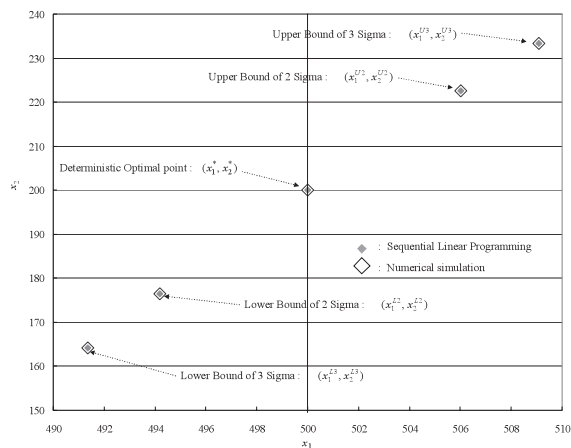


Fig. 9 Upper or lower bound of optimal solutions by numerical simulation

Table 5 Comparison of results both numerical simulation and sequential linear programming

Variable	Numerical Simulation			Sequential Linear Programming		
	$f$	$x_1$	$x_2$	$f$	$x_1$	$x_2$
Lower of 3 sigma	142,589	491.37	164.13	142,589	491.37	164.13
Lower of 2 sigma	146,466	494.19	176.40	146,466	494.19	176.40
Deterministic	154,000	500.00	200.00	-	-	-
Upper of 2 sigma	161,280	506.02	222.51	161,280	506.01	222.51
Upper of 3 sigma	164,837	509.09	233.40	164,837	509.09	233.40

(  $f$  means operating profit / 100 yen)

ところで、プロダクトミックスの意思決定においてTable 5のようにシミュレーションと逐次線形計画法について数値結果を得ることができる。ここに、 $f$ は貢献利益を意味する目的関数の結果であり、 $x_1$ はSTモデルの生産量、 $x_2$ はDXモデルの生産量の解の結果である。標準作業時間の統計的な不確実性を考慮するとき、厳密に標準偏差がわかればこのように最適解の統計的不確実性をその最適解の上界と下界の傾向として見積もることができる。したがって従来のプロダクトミックスの原価計算における利益計画の差異<sup>2,3)</sup>だけではなく統計的な不確実性の想定範囲における差異についても検討することができる。

すなわち、Fig.10に示すとおり各タイプの生産量の推移と貢献利益の影響についてもその傾向を調べることができる。これらの傾向から、標準作業時間の標準偏差の検討が改めて重要であることがわかる。

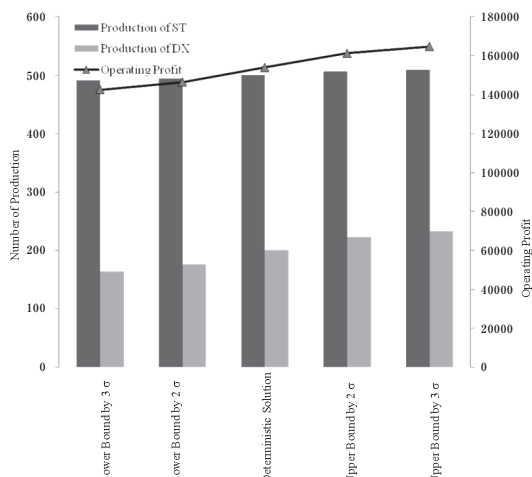


Fig. 10 Operating effectiveness of operating profit

## 5. 結 言

本研究では図解によるアプローチと提案手法の数値計算を通じて以下のことが明らかとなった。

1. プロダクトミックスの最適解を評価するとき、実際には標準作業時間の不確実性を考慮する必要があることを指摘している。また、その不確

実性は双曲線として見積もることができることを提案している。

2. 最適解を評価するとき、意思決定の水準を品質管理や信頼性工学の管理水準と同様に想定してその不確実性を最適解の上界と下界により見積もることが効果的であることをモデル化している。
3. 図解によるアプローチやシミュレーションの結果と逐次線形計画法による数値計算から、効果的に貢献利益と生産比率の推移を見積もることが可能となった。このため、従来の原価計算の利益計画の差異だけではなく想定される不確実性による変動幅としての利益の差異を取扱えることを示している。

## 参考文献

- 1) Blocher, E. J. et al; Cost Management forth edition, pp. 316-359 and pp. 610-647, McGraw-Hill/Irwin, New York, (2008).
- 2) 岡本清; 原価計算問題集, 国元書房, (2005).
- 3) 岡本清; 原価計算 (六訂版), 国元書房, (2000).
- 4) 長坂悦敬; Excelで学ぶ原価計算, オーム社, (2009).
- 5) Ragsdale, C. T.; Spreadsheet Modeling and Decision Analysis, South-Western College Publishing, Cincinnati, (2001).
- 6) 瀬口靖幸, 尾田十八, 室津義定 共編; システムと設計 (機械設計工学), 培風館, (1987).
- 7) 矢野健太郎; 図形と式, 講談社, (1979).
- 8) 坂和正敏; 線形システムの最適化, 森北出版, (1984).
- 9) Stephan Wolfram; Mathematicaブック第4版, 凸版印刷, (2000).
- 10) 日本規格協会編集; JIS Handbook Quality Control, 日本規格協会, (1991).