数値相対論における定式化問題：一般相対論における数値シミュレーションを安定化させる指針の探求

真貝 寿明　米田 元

1 はじめに

一般相対性理論は，重力の正体が時空の歪みであることを説く，時空の物理法則である．適用対象は，重くて小さな天体や宇宙全体である．基本方程式であるEinstein方程式は非線形であり，これまでEinstein自身の想像をも超えた「ブラックホール」や「膨張宇宙」を描き出し，いずれも観測的に支持されている．しかし，Einstein方程式の厳密解を，時空に対称性を課さず，あるいは動的な現象について得ることは，ほとんど絶望的である．

近年の一般相対性理論研究の中心の一つは，ブラックホールや中性子星連星の合体に伴って発生する重力波(時空の歪みが光速で伝播する現象)である．重力波の存在自体は，Einsteinによって予言されたものだが，これまで直接確認されたことはない[†1]．現在日本を含め世界各地で，重力波を地上で直接観測するレーザー干渉計が本格的に運用され始めており，運が良ければ数年以内に重

†1 電波観測によって，連星となっている中性子星パルサーの軌道周期の変化から，重力波が系よりエネルギーを取り去っていることが示されているので，重力波の存在は間接的には確認されている．

[筆者紹介]

しんかい ひさあき．1990年早稲田大学理工学部物理学科卒業．1995年同大学大学院理工学研究科博士課程修了，理学博士．同大学理工学部助手，ワシントン大学(米国セントルイス)物理学部研究員，ペンシルバニア州立大学重力物理幾何学センター客員研究員(日本学術振興会海外特別研究員)を経て，2001年より理化学研究所基礎科学特別研究員(戎崎計算宇宙物理学研究室)．主な研究分野は，一般相対性理論・宇宙論とその周辺．所属学会は，日本物理学会，日本天文学会，アメリカ物理学会，イギリス物理学会，一般相対論と重力国際組織．

よねだ げん．1989年早稲田大学理工学部数学科卒業．1995年同大学大学院理工学研究科博士課程修了，理学博士．同大学理工学部助手，非常勤講師を経て，2003年より同大学理工学部助教授．主な研究分野は，相対性理論，非線形偏微分方程式．所属学会は，日本数学会，日本物理学会，日本応用数理学会．

力波の初観測の報が飛び交うであろう．連星合体の前後で放出される重力波の波形情報から，星の軌道パラメータや原子核の状態方程式，あるいはブラックホール存在の直接証拠を始め，多くの天体物理・宇宙物理的な情報が，重力波観測を通して得られることが期待されており，重力波天文学の幕開けと呼ばれることになろう．

重力波研究に対する理論研究の課題は，予測される波形をでき得る限り正確に計算することである．中性子星連星やブラックホール連星の合体における最終段階では，Einstein 方程式を数値的に解くことが必要であり，そのために，「数値相対論」と呼ばれるシミュレーション研究に大きな期待が寄せられている．現在の数値相対論の主目的は，重力波天文学に対応できる正確な波形を得ることである．数値相対論研究は，日本を含め世界の数拠点で精力的に進められているが，現在でも，その基本的手法が確立していない発展途上の分野である．

特に重力波の波形を求めるためには，長時間の時間積分が必要とされるが，計算の途中で物理量が破綻し，シミュレーションが続けられなくなってしまうのが最大の問題である．

数年前までは，数値相対論に見られる計算の破綻は，ゲージ条件の取り方や数値積分の方法，あるいは計算機の能力不足によるものだ，と考えられていた．しかし最近，Einstein 方程式の定式化の違いで，数式的には互換であっても，数値的な「安定性」が変わることが確かな事実として認識されてきた．

本稿では，この 10 年間，数値相対論業界が模索してきた状況を振り返り，併せて著者のアイデアを紹介しながら，現状の問題点をまとめたい．著者の一人，真貝は，先にシドニーで開かれた応用数学国際会議(ICIAM 5)で，表記の講演をミニシンポジウムで依頼され，そこで初めて応用数学者達が同様な問題で悩んでいることを知った．「数値相対論」の分野は，歴史的に独自な発展をしており，時として数値流体の研究者からは「ガラパゴス諸島に棲んでいるのではないか」とまで揶揄される．遠い昔に捨て去られた数値テクニックがいまだ主流であったりするからだ．本稿の内容がそうでないことを願うが，何より応用数理学会会員にご指導を仰ぎたいと思い，本稿を執筆した次第である．

「数値相対論」の現状の課題は，**Box 1** にまとめたように多岐に渡る．本稿ではそのうちのごく一部，「Einstein 方程式を 3+1 次元に分解し自由発展させた場合，拘束条件が破れていってしまうのは何故か」という問題を扱うに過ぎない(もっとも標準的なアプローチに内在する大問題なのではあるが)．より一般的な解説については，巻末の文献を参照していただきたい．

「数値相対論」現状の課題 **Box 1**

0. どのように時空を分割して，時間発展問題に帰着させるか？
   Cauchy (3+1 次元分解)，characteristic (2+2 次元分解)，またはその組み合わせ

⇒3+1 次元分解を選択した場合…

1. どのように初期値を用意するか
   理論的な問題：拘束条件式を解くための定式化？
   現実的な物理モデルをつくるためにはどうしたらよいか？
   背景重力波の影響を取り入れた初期値をどうやって作るか？
   数値的な問題：連立楕円型偏微分方程式の解を得ることができるか？
   適切な境界条件は何か？
2. どのように時間発展を行うか？
   理論的な問題：自由発展か，途中で拘束条件を解き直すか？
   数値計算に適した発展方程式の定式化は何か？
   ⇐本稿の主題
   適したゲージ条件は何か？
   数値的な問題：時間発展を行うスキームは何か？
   適切な境界条件は何か？　特にブラックホールの境界条件は？
   星の境界の取り扱いや衝撃波の発生にどう対処するか？
   コードの並列化
3. 数値計算からどのように物理量を取り出すか
   理論的な問題：重力波情報の抽出はどうするか？
   他の近似との整合性比較
   数値的な問題：どのようにブラックホール境界を決定するか？
   数値計算結果の可視化

2 もっとも標準的な定式化：ADM 形式

Arnowitt, Deser, Misner (ADM) [6] によって 60 年代始めに考案された，4 次元時空のダイナミクスを「3 次元超曲面 (hypersurface)」$\Sigma(t)$ の時間発展として考える方法 (時空の 3+1 分解) は，数値相対論の標準的な定式化となっている[†2]．その $\Sigma(t)$ の法線ベクトルを $n^\mu=(1/\alpha, -\beta^i/\alpha)$ と記述するならば，

4 次元計量は次のように「3+1 分解」される.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i+\beta^i dt)(dx^j+\beta^j dt) \quad (2.1)$$

ここで，α と β_j はそれぞれラプス関数(lapse)，シフトベクトル(shift)と呼ばれるゲージの自由度である．γ_{ij} は 3 次元空間を表現する内的(intrinsic)計量である．Einstein 方程式(宇宙項 Λ, エネルギーテンソル $T_{\mu\nu}$)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

は，$\Sigma(t)$ への射影演算子 $\perp_\nu{}^\mu \equiv \delta_\nu{}^\mu + n^\mu n_\nu$ を用いて，$n^\mu n^\nu$, $n^\mu \perp_i{}^\nu$, $\perp_i{}^\mu \perp_j{}^\nu$ で射影したものに分解できる．本稿での議論は真空の時空についてのみとするので(物質が存在する場合の議論も変わらない[22])，$T_{\mu\nu}$ と Λ は以降ゼロとする．3 次元超曲面が 4 次元時空内にどのように埋め込まれているかを示す量として，外的曲率(extrinsic curvature)と呼ばれる量 $K_{ij} \equiv -\perp_i{}^\mu \perp_j{}^\nu \nabla_\nu n_\mu$ を導入すると，$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$, $G_{\mu\nu}n^\mu \perp_i{}^\nu$ は，時間微分を陽に含まない拘束条件式，$G_{\mu\nu} \perp_i{}^\mu \perp_j{}^\nu$ は，時間に関する 1 階の発展方程式として書き直すことができる†3．

発展方程式，拘束条件の順に(D_i は 3 次元共変微分)

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i \quad (2.3)$$

$$\partial_t K_{ij} = \alpha R^{(3)}_{ij} + \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik}K_j{}^k - D_iD_j\alpha + 2K_{(ki}D_{j)}\beta^k + \beta^k D_k K_{ij} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{H} \equiv {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} \approx 0 \quad (2.5)$$

$$\mathcal{M}_i \equiv D_j K_i{}^j - D_i K \approx 0 \quad (2.6)$$

となる．記号の $\approx$ は拘束系の力学で用いられる weak equality であり，拘束条件が満たされる場合は等号と同じである．$\mathcal{H} \approx 0$ は Hamiltonian 拘束条件式(エネルギー拘束条件式)，$\mathcal{M}_i \approx 0$ は運動量拘束条件式と呼ばれる．ADM 形式は，時間に関して 1 階の 12 個の変数(γ_{ij}, K_{ij})から構成されている．常にゲージの自由度が 4 つ(α, β_i)あり，4 本の拘束条件式(2.5), (2.6)が存在するので，物理的な自由度は 4 である．これは，重力波の自由度が 2 であることに

†2 本稿の notation は教科書[4]に従う．すなわち，時空の符号は(−+++)とし，光速を $c=1$ とする単位系を取る．各項で同じ添え字がある場合は和を取る，という Einstein の記法を用いる．添え字の動く範囲は，ギリシャ文字については $\mu, \nu=0, \cdots, 3$, ローマ文字については $i, j=1, 2, 3$ とする．Christoffel 記号と，Riemann 曲率・Ricci 曲率・Ricci スカラーは，$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \equiv (1/2)g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$, $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$, $R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$, $R \equiv R_\mu{}^\mu$ として定義する．(ただし $\partial_\alpha = (\partial/\partial x^\alpha)$.)

†3 ADM による本来の定式化は，正準変数となる，(γ_{ij}, $\pi^{ij} \equiv \sqrt{\gamma}(K^{ij} - K\gamma^{ij})$) を基本変数とした定式化であった．ここでは，数値相対論屋が標準としている．Smarr と York[24], [32]による(γ_{ij}, K_{ij})を基本変数とする定式化をスタートポイントとする．両者の違いは，発展方程式(2.4)の右辺に拘束条件式(2.5)が使われて Ricci スカラー R が陽に出ないような形になっていることである．実はこの置換が安定性の議論に重要になることを後に述べる．

対応している．$\mathcal{H}$, $\mathcal{M}_i$ の時間発展方程式(拘束伝播方程式，Constraint Propagation)を記すと次のようになる[12]．

$$\partial_t \mathcal{H} = \beta^l D_l \mathcal{H} + 2\alpha K \mathcal{H} - 2\alpha(D_l \mathcal{M}^l) - 4(D_l \alpha)\mathcal{M}^l \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{M}_i = & -(1/2)\alpha(D_i \mathcal{H}) - (D_i \alpha)\mathcal{H} + \beta^j D_j \mathcal{M}_i \\ & + \alpha K \mathcal{M}_i + (D_i \beta_j)\mathcal{M}^j\end{aligned} \tag{2.8}$$

この 2 式は，『もし初期時刻に拘束条件が満たされている($\mathcal{H} \approx 0$, $\mathcal{M}_i \approx 0$)ならば，以後の時間発展の間もそのまま継続して満たされる』ことを意味する．(電磁気学の Maxwell 方程式の拘束条件式と同じである．)この事実を根拠にして，一般相対論の数値シミュレーションは，長い間「ADM 形式を用い，初期に拘束条件を解き，時間発展の最中は拘束条件式をモニターして精度確認する」という方法で行われてきた[†4]．

この標準的な方法は，重力崩壊やブラックホール形成の臨界現象，宇宙論などの数値計算で成功を収めてきた．しかし，コンパクト連星合体による重力波の発生メカニズムのように，強い重力場を長時間発展させなければならない問題に対しては綻びが見え始めた．上記の『…』の記述は，数値計算上は必ずしも正しくないのではないか，と研究者たちが気づいたのは 90 年代始めである．

3 3 つのアプローチ

現在では，ADM 形式に代わって長く安定な時間発展を得る方法として，(互いに完全に独立なものではないが)3 つのアプローチがある．以下では，それぞれを短く紹介しよう．**図 1** は年表である．

3.1 Strategy 1：中村らによる修正 ADM 形式(BSSN 形式)

現在，大規模数値シミュレーションでもっとも良く使われているのが，京都大学の中村卓史ら[16]によって考案された修正 ADM 形式である．業界では，柴田・中村の論文に使われていたこの定式化を再発見した Baumgarte-Shapiro の頭文字をとって，BSSN 形式と呼ばれることも多い．広く使われている notation[8]では，基本変数は

$$\varphi = (1/12)\log(\det \gamma_{ij}), \qquad \tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\varphi}\gamma_{ij}, \qquad K = \gamma^{ij}K_{ij}$$
$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\varphi}(K_{ij} - (1/3)\gamma_{ij}K), \qquad \tilde{\Gamma}^i = \tilde{\Gamma}^i_{jk}\tilde{\gamma}^{jk}$$

で定義される 5 つである．3 次元計量と外的曲率を，共形部分とそれ以外に分解し，さらに Ricci 曲率の計算に登場する Christoffel 記号の一部を独立に時間発展させる，という作戦である．結果として，拘束条件式は，ADM 形式での Hamiltonian 拘束条件式・運動量拘束条件式(いわば「運動学的」拘束条

†4 途中で拘束条件式を解き直す，という提案もあるが，数値的には時間を要し，ブラックホールが発生すると特異点の境界条件が厄介になる，という問題があるため，未だ自由発展が計算の主流である．

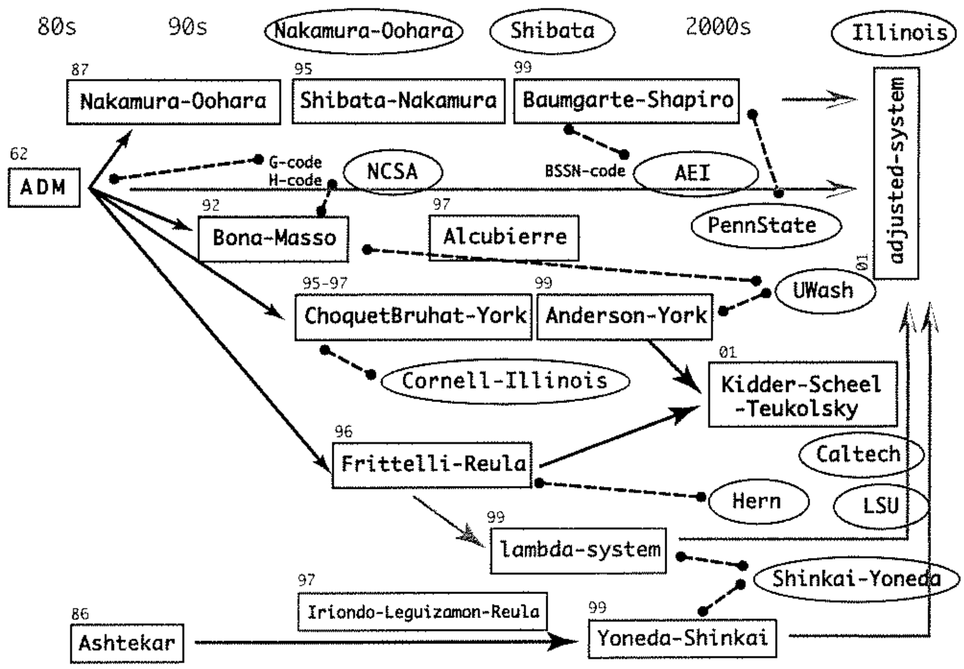

図 1　数値相対論における定式化問題研究の歴史的概略

枠囲みは定式化の提案，丸囲みは実際に数値計算テストを行った仕事を示す．それぞれの文献については，[1]の**表 1** を参照されたい．

件)の他に，$\mathcal{G}^i := \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\gamma}^{jk}\tilde{\Gamma}^i_{jk} \approx 0$, $\mathcal{A} := \tilde{A}_{ij}\tilde{\gamma}^{ij} \approx 0$, $\mathcal{S} := \tilde{\gamma} - 1 \approx 0$ の 3 つの「代数的」拘束条件が存在する．

何故 BSSN 形式が ADM 形式より安定性に優れているのだろうか．いくつかの説明がなされたが，決定的なものはない．BSSN 形式では，新変数 Γ_i の導入により，Ricci 曲率 R_{ij} の表現方法が ADM 形式と異なる．この表現の差はわずかではあるが，平坦な時空で重力波摂動を考えた時，新しい R_{ij} は波の伝播を陽に記述するオペレーターを再現するので好ましい，と中村らは説明する．しかし，これは弱い重力のときにのみ有効な議論である．ドイツのグループ[5]は，数値計算の比較から，BSSN 形式の安定性改善は，発展方程式の右辺の一部を運動量拘束条件を用いて修正したからではないか，と報告した．また，BSSN 発展方程式を線形化し，双曲形式のレベル分類から説明を試みた報告もある[5], [17]．しかし BSSN 形式では(ADM 形式と同様に)不適切な解(ill-posed solution)の存在[13]も示されており，この説明も完全に納得できるものではない．後に述べる我々の解析は，BSSN 形式の利点は「新変数の導入よりも，運動量拘束条件を用いた修正に依る」という結論になった．我々はさらに「BSSN 方程式を拘束条件を用いて再修正することによって，漸近的拘束システム(§ 3. 3)が構築できる」ことも示している[30](§ 4)．

3. 2　Strategy 2：陽に双曲形式を目指す定式化

第 2 のアプローチは，発展方程式が陽に 1 階の双曲形式となるように Einstein-ADM 方程式を再定式化する方法である．双曲化された定式を用いれば，適切性の保証された時間発展や特性速度情報の存在から境界条件のより良い取り扱いが可能ではないか，と期待されてきた．

これまで，非常に多くの双曲形式が提案されてきたが，双曲化が数値計算の安定化に貢献するかどうか，明確な結論は未だ出ていない．双曲化が注目された初期の頃の数値計算は，安定化に対する利点を強調したものが多かった[9]，[18]が，これらは ADM 形式との比較であり，ADM 形式がもともと性質が悪いこと[21]を考慮すれば当然の結果と言えないこともない．我々自身も「どのレベルの双曲形式(弱双曲型，強双曲型，対称双曲型)が，数値的安定性を与えるのか」という視点から一つの双曲形式を提案し[7]，[27]，数値計算実験を試みた[20]が，安定性に関しては有意な差は得られなかった．

今後の比較研究の上で，注目すべき事項は次の 3 点であろう．(a) Einstein 方程式は非線形であるので，双曲化されたとしても，その適切性は時間的にローカルなものしか得られない．(b) エネルギー不等式が保証されたとしても，必ずしもノルムが一定あるいは減少することを保証しない．(c) 双曲型の議論では，非特性項の影響は無視されている．我々は，数値相対論業界における双曲形式への過度の期待と混乱は，これらの事項にあると考えている．特に(c)の非特性項の影響は重要である．この点に関して，最近提案された KST 形式[14]は，パラメータの選び方によっては，非特性項の影響を小さくすることができるもので，今後の比較計算が期待される．もし安定性に関する解析的な予想と数値計算の振る舞いが一致するならば，双曲形式のアプローチは数値相対論で非常に有効な手段として残るであろう．我々が提案する方法は，次の第 3 のアプローチに属するが，解析方法は上記の非特性項の影響も含めたものである．

3.3 Strategy 3：漸近的拘束システム

第 3 のアプローチは，時間発展のアトラクターが拘束面であるようなシステムを構築するアプローチである．このアイデアは，Brodbeck ら[10]によって「λ-システム」と命名されて提案されたのが初めであるが，その後，我々はより簡略化したステップで同様の効果を得ることができる「補正システム (adjusted system)」を提案[28]し，前章までのアプローチの統一を試みている．

"λ-システム" Brodbeck ら[10]は，対称双曲型の発展方程式をベースに，拘束条件式の破れを測るような量である新変数 λ を導入し，λ が単調減衰するように意図的に発展方程式を設定することによって，元の系が拘束面に収束するような手法を提案した．新しい発展方程式も対称双曲型であるように設計されているので，系の発展は適切であることが期待される．

我々は，Ashtekar によって提案された Einstein 方程式の新しい正準変数を用いて，システムの「λ化」を行い，拘束条件式の破れとともに実数条件の破れも制御できうることを示した[19]．我々は実際に数値計算も行い，期待された拘束面への収束が，数値的に実現することを示した[28]．人工的に拘束面へ回帰した数値解がはたして本当の方程式の解なのか，という疑問も呈されている[23]が，差分誤差程度で長時間発展を行うことが目的であるならば，誤差の小さいうちにその拡大を防ぐ，という発想はとても魅力的であると思う．

しかし「λシステム」には代償も多い．元のシステムが対称双曲型であることを前提としているので，Einstein 方程式ではその応用が限られるという制限がある．また新たに拘束条件の数だけ新しい変数を加えるので数値計算にも負担がかかる．

補正システム(adjusted system)[21], [28]~[31]　我々は，単に運動方程式の右辺に拘束条件式を加え，その係数(Lagrange 乗数)を調節することで，拘束面をアトラクターとするシステムが構築できることを提案した．すなわち，発展方程式 $\partial_t u^a = f(u^a, \partial_i u^a, \cdots)$(陽に双曲型でなくてもよい)を，システムが満たすべき(第1種)拘束条件式 $C^a(u^a, \partial_i u^a, \cdots) \approx 0$ を用いて補正(修正，置換，adjustment)する．

$$\partial_t u^a = f(u^a, \partial_i u^a, \cdots) + F(C^a, \partial_i C^a, \cdots) \tag{3.1}$$

元の発展方程式に対称双曲型を要請せず，基本変数の数が元の発展方程式と同じに保たれるので，「λシステム」よりも汎用的である．

運動方程式を拘束条件式で補正する，という点から言えば，手法そのものは前章までに紹介したものと同じである．しかし我々は，理論武装として，拘束伝播方程式のモード固有値解析を用いることも提案した．拘束条件式の破れが問題であるなら，拘束条件式を仮想発展させて，その破れが増大するかどうかを検証すればよいではないか，という発想である．上記の補正によって，従来の拘束伝播方程式 $\partial_t C^a = g(C^a, \partial_i C^a, \cdots)$ も

$$\partial_t C^a = g(C^a, \partial_i C^a, \cdots) + G(C^a, \partial_i C^a, \cdots) \tag{3.2}$$

と補正される．両者の違いを解析すれば，拘束条件の破れを制御できるはずだ．そこで，(3.2)の右辺全体を(例えば Fourier 変換によって)モード分解する．

$$\partial_t \hat{C}^a = M^a{}_\beta \hat{C}^\beta \quad \left(\text{where } C(x,t)^\rho = \int \hat{C}(k,t)^\rho \exp(ik \cdot x) d^3k\right) \tag{3.3}$$

常微分化された右辺の行列 $M_\beta{}^a$ の対角化可能性や固有値 Λ(我々は**振幅拡大ファクター**(Constraint Amplfication Factor, 以後 CAF)と呼ぶ)を解析することで，(3.1)の Lagrange 乗数的補正関数 $F(C^a, \partial_i C^a, \cdots)$を決定しよう，という作戦である．発展方程式の補正は数式上は「ゼロを加える」互換な操作であ

っても，補正によってCAFの改善が見られた場合，その発展式を使うことは数値計算での安定化につながる，と考えるのである．

CAFがどうなれば数値的安定性が得られるだろうか．(3.3)が単独の方程式だったとすると，CAFをλとして，$\hat{C}=\hat{C}(0)\exp(\lambda t)$という解になる．よって，$\lambda$の実部が非正のときは解は有界である．さらに，実部が負のときは漸近的に拘束条件の破れは減衰してゆくことが期待される．一方，固有値の虚部が存在すれば，解は伝播するモードを持つ．これは数値誤差が局所的に拡大せずに，数値粘性で減衰する余地を残す．つまり，CAFの実部は非正・虚部は非ゼロであることが好ましい．従って，補正システムの処方箋は，そのようなCAFを実現するための乗数をあらかじめ与えて数値計算に適用すること，とまとめることができよう．

実際には(3.3)の解は重複することが多いので，振舞いはこれほど単純ではない．固有値の重複度を含めて考えるためには行列$M_\beta{}^\alpha$の対角化可能性を考慮する必要がある．より詳しい説明は，[31]を参照していただきたい．拘束伝播方程式の発展形態を一般的に議論し，考察するプロセスをフローチャートで示している．次章では「補正システム」の観点から，これまでに紹介した他のアプローチの統一的な理解を試みる†5．

†5 一般相対論の話に応用する前に，電磁気学の基礎方程式であるMaxwell方程式でイメージを与えておきたい．

真空の電磁波を記述するMaxwell方程式は，電場E^iと磁場B^iに対して，2本の拘束条件$C_E:=\partial_i E^i\approx 0$, $C_B:=\partial_i B^i\approx 0$と，2本の発展方程式$\partial_t E_i=\varepsilon_i{}^{jk}\partial_j B_k$, $\partial_t B_i=-\varepsilon_i{}^{jk}\partial_j E_k$とで構成される．これらの拘束伝播方程式を計算すると，$\partial_t C_E=0$及び$\partial_t C_B=0$となり，増大も減衰もしない．ところが，拘束条件を用いて，例えば$p_i{}^j$, $q_i{}^j$, $r_i{}^j$, $s_i{}^j$を定数として，発展方程式を次のように補正したとする：

$$\partial_t E_i = \varepsilon_i{}^{jk}\partial_j B_k + p_i{}^j(\partial_j C_E) + q_i{}^j(\partial_j C_B) \tag{3.4}$$

$$\partial_t B_i = -\varepsilon_i{}^{jk}\partial_j E_k + r_i{}^j(\partial_j C_E) + s_i{}^j(\partial_j C_B) \tag{3.5}$$

これらの補正により，拘束伝播方程式は，恒等的にゼロではなく，

$$\partial_t C_E = p^{ji}(\partial_i\partial_j C_E) + q^{ji}(\partial_i\partial_j C_B) \tag{3.6}$$

$$\partial_t C_B = r^{ji}(\partial_i\partial_j C_E) + s^{ji}(\partial_i\partial_j C_B) \tag{3.7}$$

となる．全体をFourierモード分解し，

$$\partial_t\begin{pmatrix}\hat{C}_E\\ \hat{C}_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k_ik_jp^{ji} & -k_ik_jq^{ji}\\ -k_ik_jr^{ji} & -k_ik_js^{ji}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{C}_E\\ \hat{C}_B\end{pmatrix} =: T\begin{pmatrix}\hat{C}_E\\ \hat{C}_B\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

右辺の行列Tの固有値CAFを求めると

$$\Lambda^{\pm} = \frac{p+s\pm\sqrt{p^2\pm 4qr-2ps+s^2}}{2} \tag{3.9}$$

となる．ここで，$p:=-k_ik_jp^{ji}$, $q:=-k_ik_jq^{ji}$, $r:=-k_ik_jr^{ji}$, $s:=-k_ik_js^{ji}$である．これにより，係数p, q, r, sを適当に選ぶとCAFがすべて負と成り得ることがわかり，実際にそのように選んだ補正システムでは，数値シミュレーションの誤差が漸近的に縮小していくことが確かめられた．詳しくは，[28]を参照していただきたい．

4 「補正システム」の観点から試みる統一的な理解

陽に双曲形式を目指す定式化との比較　§3.2 で紹介した，陽に双曲形式を目指す定式化との比較は，Maxwell 方程式と Einstein 方程式の Ashtekar による定式化(対称双曲型)の 2 つのシステムについて数値計算を行った[20], [28]．我々は「λ システム」の有効性を示した場合と同じモデルで，「補正システム (adjusted system)」を試したところ，期待していた「拘束面への漸近的収束」を示すことに成功した．これらは，数値的安定性という観点から言えば，弱双曲型・強双曲型といった双曲型分類の違いを超える実用的なものであった．

ADM 形式への応用　§2 で紹介した ADM 形式は，1 階双曲型には分類されないので，「λ システム」を作ることはできない．しかし「補正システム」の手順で CAF 評価を行うと，拘束条件の破れが存在した場合の数値計算の運命が予測できる．驚くべきことに，ブラックホール時空(Schwarzschild 時空)を背景時空として，ADM 形式の拘束伝播方程式の解析を行うと，ブラックホールの近傍になるほど CAF の実部が正負に分離してしまうことが示された[21]．これは即ち，「ADM 形式は，拘束条件の破れを加速するモードを持ち(減速するモードもあるが)，強い重力場ほどその効果が顕著に現われる」ことを意味する．もちろん，我々の固有値解析は背景時空の選択や，座標の取り方にも依存するのですべての場合で ADM 形式を悪者扱いにすることはできないが，これまで「1 階の双曲形式でないから ADM 形式は不安定なのだ」という曖昧な解釈からは一歩前進した理解になったと言えるだろう．

さらに，ADM 形式に対してある特定の補正を施せば，CAF の実部が非正になり得ることもわかった[29], [21]．ADM 形式でも漸近的に拘束条件を満たすようなシステムに変わり得るのである．我々は，数値的安定性が良いと期待される補正方法をいくつか提案[21]し，現在実際に数値シミュレーションを行ってその確認を進めている．進行中のプロジェクトであるが，結果の一部を示したい．

図 2 は，線形重力波(Teukolsky 波[25])の伝播を周期境界条件を用いて長時間発展を行った計算結果である．初期値やグリッドの大きさはすべて同じにしているのにも関わらず，使用する方程式の違いによって拘束条件の破れ具合が異なっている．図は Original ADM 形式(脚注 †3 で紹介した (γ_{ij}, π^{ij}) を変数とする形式)/Standard ADM 形式(§2)/簡略 Detweiler 型補正 ADM 形式/Detweiler 型補正 ADM 形式の 4 つの例だが，後 2 者は実部が負の CAF を持ち，期待されたように指数関数的に拘束条件のノルムが減少していくのがわかる．

発展方程式の時間反転非対称化　上記の数値計算は，CAF の仮説(A)を実現できれば，拘束面がアトラクターになるような発展システムが実現している

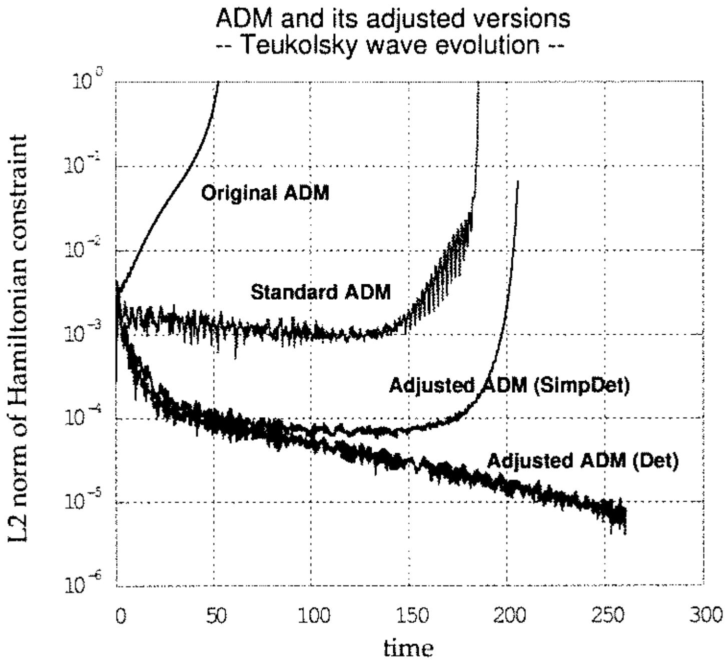

図 2 補正 ADM 形式と元の ADM 形式の数値的安定性比較

線形重力波(Teukolsky 波)の伝播を用いて長時間発展を見たもの．空間 3 次元の数値計算で，数種の補正 ADM 形式に対して比較している．時間発展は調和スライス条件，周期境界条件，iterative Crank-Nicholson 法を用いた．

ことを示唆している．これは即ち，拘束条件の破れが必ず減少するという「時間反転非対称」なシステムを構築することを意味する．発展方程式を拘束条件式で補正する，と述べただけでは無限の組み合わせが考えられるが，「時間反転非対称となるように補正項を加える」ことに注目すると，補正項の候補を絞ることができる．

BSSN 形式への対応 §3.1 で紹介した，BSSN 形式の利点も，我々の CAF で説明することができる[30]．それによると，数値シミュレーションで経験的に知られていた[5]ように，運動方程式の一部を運動量拘束条件式で置換していたことが決定的だったようだ．この置き換えがないと，BSSN 形式の CAF の実部は，正と負の両方のモードを含み，置き換えをすると，実部がゼロかつ虚部が存在するようになる．すなわち拘束条件の破れを拡大するような不本意なモードが存在しなくなる．我々の結論では，BSSN 形式の利点は，新変数 Γ^i の導入ではなく，単に運動方程式の補正のバランスが偶然に良かったからだ，ということになった．

それでは上記の「時間反転非対称化」を BSSN 形式に応用したら，より堅牢な方程式になるのではないだろうか．我々は，BSSN 形式の CAF 実部を負にするようなシステムをつくることが実際に可能であることを指摘し，運動方程式の補正方法をいくつかの提案をした[30]．この提案は，直ちにイリノイ大

学のグループによって数値実験され，回転するブラックホール解のテスト計算で，回転の大きさ J/M が 0.9 M という非常に大きい場合でも，長時間にわたって(これまでの BSSN 形式よりも数倍長い時間 $t\sim6000\ M$)安定に計算が続けられるようになったことが報告された[26]．彼らの計算では，数値解が確かに厳密解に近づいていることも示されている．

5　まとめと展望

本稿では，一般相対論における安定な数値シミュレーションを行うための，Einstein 方程式の定式化問題を解説した．近年のアプローチを(0) Standard ADM 形式(§ 2)，(1) BSSN 形式(§ 3. 1)，(2)陽に双曲形式を目指す定式化(§ 3. 2)，(3)漸近的拘束システム(§ 3. 3)，に分類して理解することを試みた．

このうち，(2)の双曲形式のアプローチがもっとも伝統的な数学理論に基づくのだが，複雑な Einstein 方程式ではこれまで証明された事実がそのまま適用できない場合が多く，未だ主流であるとは言い難い．我々は，非特性項の影響を論じる手段を持つか，非特性項が完全に除去された発展方程式を得ない限り，このアプローチで実用上の利点を得ることは難しいのではないかと考えている．

我々自身は，上記(3)のアプローチを推進している．これは，時空のアトラクターが拘束面に向かうように運動方程式を Lagrange 乗数補正するものである．我々の理論武装は，拘束伝播方程式を併用して，拘束条件の破れを事前に回避することであり，そのために，拘束伝播方程式のモード解析・固有値解析を行うことを提案した．これまでのところ，(3)のアプローチは成功を収めているが，より複雑な時空のダイナミクスを追うときには，一層の工夫が必要となるだろう．事実，現在比較を進めている弱い重力波伝播の数値計算では，拘束面に近づいていく様子が見られても最終的に再び計算が破綻してしまう例がある．将来的には，「拘束面よりどれだけ離れてしまっているか」という「距離」の指標を確立し，「補正係数の自動応答制御」を可能にするなどの前進が必要だと考えている．

数値相対論の「定式化問題」は，問題の認識が遅れていたこともあって，近年精力的に研究が続けられている．現在は，大型数値シミュレーションを通じてきちんと系統的に比較計算を実行しようという機運も高まっている．2002 年にはメキシコで，「定式化問題」の比較計算をするために，世界のグループが試みるべき共通問題の設定とプログラムインターフェースを作るという研究会が開かれた(著者も企画者の一人であった)．2 週間缶詰めになった研究会の成果の一部は，論文[15]で察していただくことができると思う．

本稿では，Einstein 方程式を「拘束条件付きの発展方程式問題」という視点から一貫して記述した．しかしこの問題は，一般相対論固有のものではなく，

他の分野(電磁気学，流体力学，分子動力学，機械工学，…)でも登場する問題のようだ．最近，共通の問題意識をもつことを知った著者は，他の分野で培われてきた問題解決法を吸収しようと努力しているところである．本稿をきっかけにして，異分野の方々からのご意見を伺ったり，さらなる共同研究に発展できれば幸いに思う．

謝辞 本研究に関し，真貝は，理化学研究所基礎科学特別研究員研究費，および文部科学省科学研究補助金若手研究(B)課題番号 14740179 の交付を受けた．米田は，早稲田大学特定課題個人研究費(2003A-870)，科研費(16540126)の交付を受けた．

[参考文献]

[1] Shinkai, H., and Yoneda, G., Reformulating the Einstein equations for stable numerical simulations, in Progress in Astronomy and Astrophysics(Nova Science Publ), in print. 本稿の内容を，同業者向けに詳しく解説したレビュー．プレプリントサーバより取得可能．(http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0209111)．

[2] Lehner, L., Numerical relativity : a review, Classical and Quantum Gravity, 18(2001), R25-R86. 数値相対論全体の広く浅いレビュー．

[3] Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., Numerical relativity and compact binaries, Physical Report, 376(2003), 41-132. 連星中性子星問題を中心に数値相対論を解説したレビュー．

[4] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., Gravitation, Freeman, N. Y., 1973.

[5] Alcubierre, M., Allen, G., Brügmann, B., Seidel, E., and Suen, W-M., Towards an understanding of the stability properties of the 3+1 evolution equations in general relativity, Physical Review D, 62(2000), 124001.

[6] Arnowitt, R., Deser, S., and Misnter, C. W., The Dynamics of General Relativity, in Gravitation : An Introduction to Current Research, ed. by L. Witten, Wiley, New York, 1962.

[7] Ashtekar, A., New Variables for Classical and Quantum Gravity, Physical Review Letters, 57(1986), 2244-2247. New Hamiltonian formulation of general relativity, Physical Review D, 36(1987), 1587-1602.

[8] Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., Numerical integration of Einstein's field equations, Physical Review D, 59(1999), 024007. Shibata, M., and Nakamura, T., Evolution of three-dimensional gravitational waves : Harmonic slicing case, Physical Review D, 52(1995), 5428-5444.

[9] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., and Stela, J., New Formalism for Numerical Relativity, Physical Review Letters, 75(1995), 600-603; First order hyperbolic formalism for numerical relativity, Physical Review D, 56(1997), 3405-3415.

[10] Brodbeck, O., Frittelli, S., Hübner, P., and Reula, O. A., Einstein's equations with asymptotically stable constraint propagation, Journal of Mathematical Physics, 40(1999), 909-923.

[11] Detweiler, S., Evolution of the constraint equations in general relativity, Physical Review D, 35(1987), 1095-1099.

[12] Frittelli, S., Note on the propagation of the constraints in standard 3+1 general relativity, Physical Review D, 55(1997), 5992-5996.

[13] Frittelli, S., and Gomez, R., Ill-posedness in the Einstein equations, Journal of Mathematical Physics, 41(2000), 5535-5549.

[14] Kidder, L. E., Scheel, M. A., and Teukolsky, S. A., Extending the lifetime of 3D black hole computations with a new hyperbolic system of evolution equations, Physical Review D, 64(2001), 064017.

[15] Mexico Numerical Relativity Workshop 2002 participants, Toward standard testbeds for numerical relativity, Classical and Quantum Gravity, 21(2004), 589-613.

[16] Nakamura, T., Oohara, K., and Kojima, Y., General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes, Progress of Theoretical Physics Supplement, 90(1987), 1-218.

[17] Sarbach, O., Calabrese, G., Pullin, J., and Tiglio, M., Hyperbolicity of the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura system of Einstein evolution equations, Physical Review D, 66(2002), 064002.

[18] Scheel, M. A., Baumgarte, T. W., Cook, G. B., Shapiro, S. L., and Teukolsky, S. A., Numerical evolution of black holes with a hyperbolic formulation of general relativity, Physical Review D, 56(1997), 6320-6335.

[19] Shinkai, H., and Yoneda, G., Asymptotically constrained and real-valued system based on Ashteker's variables, Physical Review D, 60(1999), 101502.

[20] Shinkai, H., and Yoneda, G., Hyperbolic formulations and numerical relativity : Experiments using Ashtekar's connection variables, Classical and Quantum Gravity, 17 (2000), 4799-4822.

[21] Shinkai, H., and Yoneda, G., Adjusted ADM systems and their expected stability properties : constraint propagation analysis in Schwarzschild spacetime, Classical and Quantum Gravity, 19(2002), 1027-1049.

[22] Shinkai, H., and Yoneda, G., Constraint propagation in N+1 dimensional space-time, General Relativity and Gravitation, 36(2004), 1931-1937.

[23] Siebel, F., and Hübner, P., Effect of constraint enforcement on the quality of numerical solutions in general relativity, Physical Review D, 64(2001), 024021.

[24] Smarr, L., and York Jr., J. W., Kinematical conditions in the construction of spacetime, Physical Review D, 17(1978), 2529-2551.

[25] Teukolsky, S. A., Linearized quadrupole waves in general relativity and the motion of test particles, Physical Review D, 26(1982), 745-750.

[26] Yo, H-J., Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., Improved numerical stability of stationary black hole evolution calculations, Physical Review D, 66(2002), 084026.

[27] Yoneda, G., and Shinkai, H., Symmetric hyperbolic system in the Ashtekar formluation, Physical Review Letters, 82(1999), 263-266; Constructing hyperbolic systems in the Ashtekar formulation of general relativity, International Journal of Modern Physics D, 9 (2000), 13-34.

[28] Yoneda, G., and Shinkai, H., Hyperbolic formulations and numerical relativity II : Asymptotically constrained system of the Einstein equation, Classical and Quantum Gravity, 18(2001), 441-462.

[29] Yoneda, G., and Shinkai, H., Constraint propagation in the family of ADM systems, Physical Review D, 63(2001), 124019.

[30] Yoneda, G., and Shinkai, H., Advantages of modified ADM formulation : constraint propagation analysis of Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura system, Physical Review D, 66(2002), 124003.

[31] Yoneda, G., and Shinkai, H., Diagonalizability of Constraint Propagation Matrices, Classical and Quantum Gravity, 20(2003), L31-L36.

[32] York Jr., J. W., Kinematics and Dynamics of General Relativity, in Sources of Gravitational Radiation, ed. by L. Smarr, Cambridge, 1979.

[1]〜[3]はレビュー，[4]は一般相対論の辞書的な教科書である．他はアルファベット順．

[Abstract]

We review recent efforts to re-formulate the Einstein equations for fully relativistic numerical simulations in general relativity. The so-called "numerical relativity" is a promising research field matching with ongoing astrophysical observations such as gravitational wave astronomy. Many trials for longterm stable and accurate simulations of binary compact objects have revealed that mathematically equivalent sets of evolution equations show different numerical stability in free evolution schemes. After reviewing the efforts of the community in the decade, we introduce our idea for understanding all the efforts in a unified way using eigenvalue analysis of the constraint propagation equations. The modifications of (or adjustments to) the evolution equations change the character of constraint propagation, and several particular adjustments using constraints are expected to diminish the constraint-violating modes. We propose several new adjusted evolution equations, and present some numerical demonstrations.