

タイムマシンはできるのか 相対性理論入門



相対性理論 = 時間と空間の理論

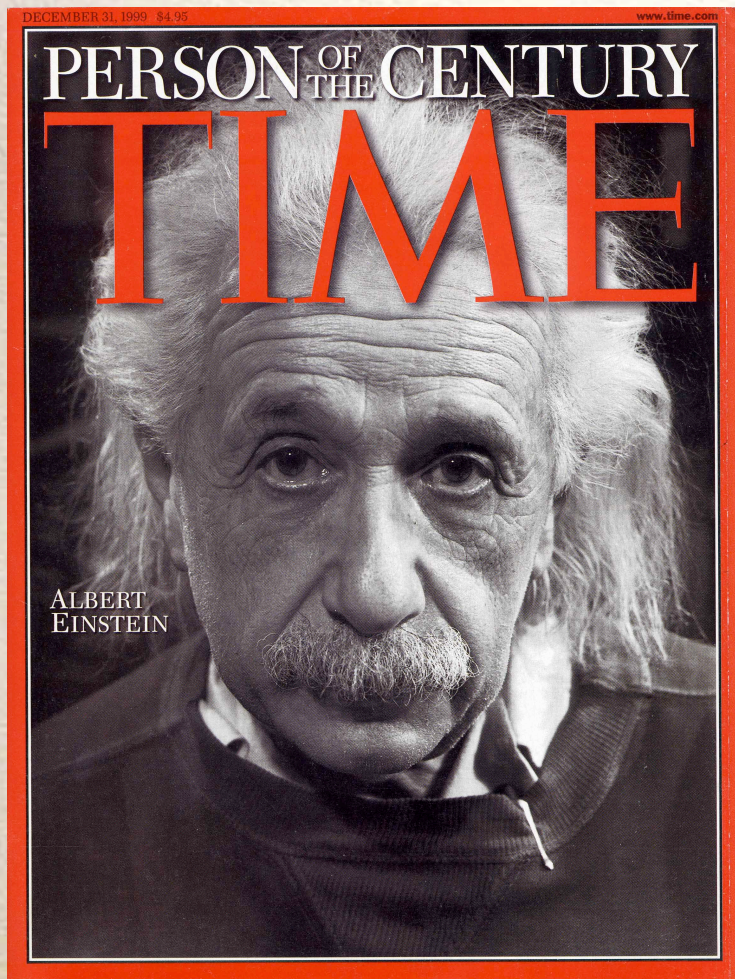
特殊相対性理論 (1905年)

一般相対性理論 (1916年)

大阪工業大学 情報科学部 真貝寿明

<http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/>

アインシュタイン



アルベルト・アインシュタイン
1879 (明治12)/3/14
~1955 (昭和30)/4/18

Time
1999/12/31

2005年は世界物理年



科学の重要性と、自然や宇宙に対する真理探究の重要性を訴える1年間



1905年は奇跡の年 26歳のアインシュタインが
「量子力学の基礎」 「ブラウン運動の理論」 「相対性理論」

特殊相対性理論 【概略】

- 電磁気学の方程式に、光速 c が登場した。
どの座標系で見たかを議論していないのに……

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{E} = 0, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{B} = 0, \quad \text{where } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- 特別な慣性系の存在？ 光を伝える媒質の存在？



相対性原理

「すべての自然法則は、あらゆる慣性系で同じである」

光速不変の原理

「相互作用は有限の速度で伝わる。最大値が光速である」

光速はどの座標系から見ても一定である。
＝時間の進み方は、絶対的なものではない。

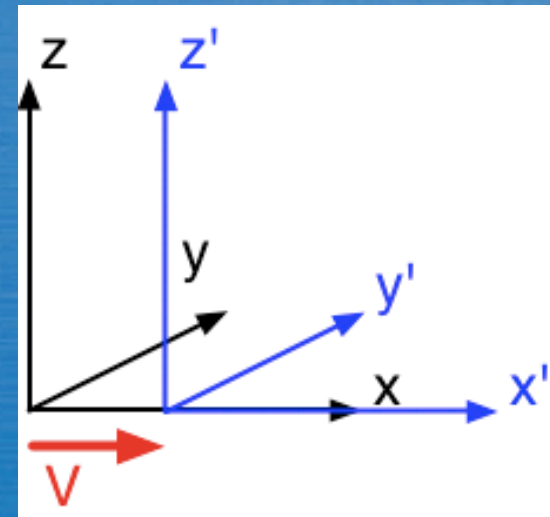


特殊相対性理論 【時間の相対性】

- 動いている座標と静止している座標との変換則（ローレンツ変換）

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$



- 時間の進み方だけを考えると,

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dt$$

動いている人の時間の進み方は, 静止している人よりも遅い.

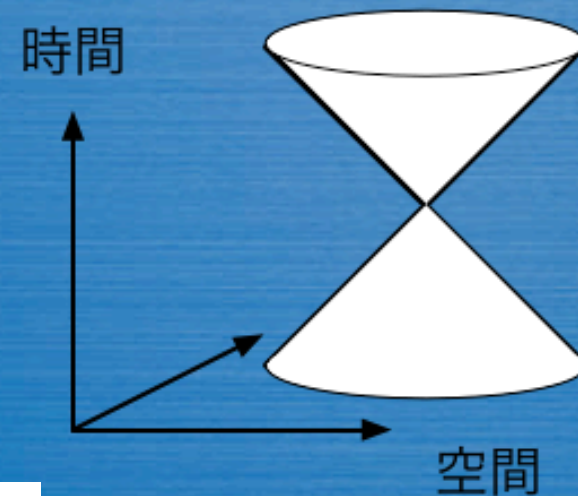


特殊相対性理論 【4次元時空】

- 時間と空間3次元を含めて、4次元の「時空」で考える。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$





特殊相対性理論 【ウラシマ効果】

- 動いている人の時間の進み方は、静止している人よりも遅い。

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dt$$

- 「水の江の浦の島子を詠める一首」（万葉集 卷九 1740-41）
……家ゆ出でて 三歳の中に 垣もなく 家滅せめやと……

3年間竜宮城にいる間に、300年も経っていた。

$$300 \text{ year} = \int_0^{3 \text{ year}} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dt \implies v = 0.9999499c$$

竜宮城は光速の99.995%で動いていた。

未来へ行くタイムマシンは実現可能！



特殊相対性理論 【速度の合成】

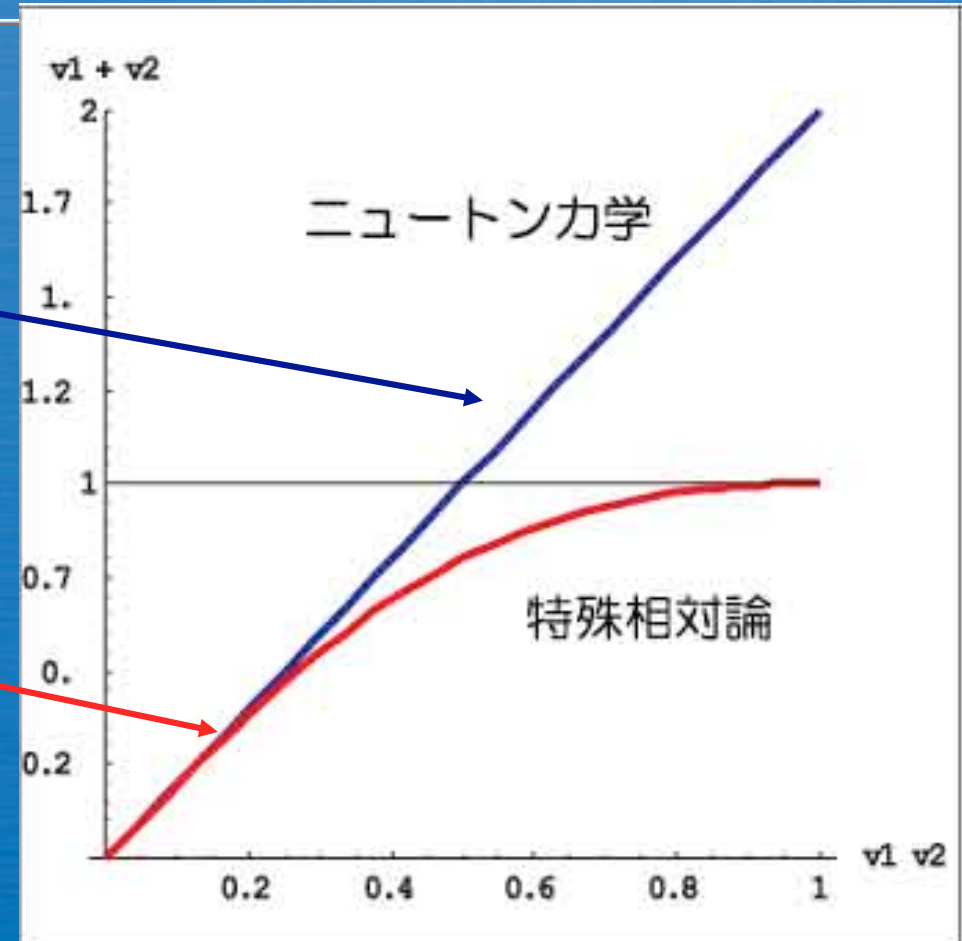
速度の足し算 (ニュートン力学)

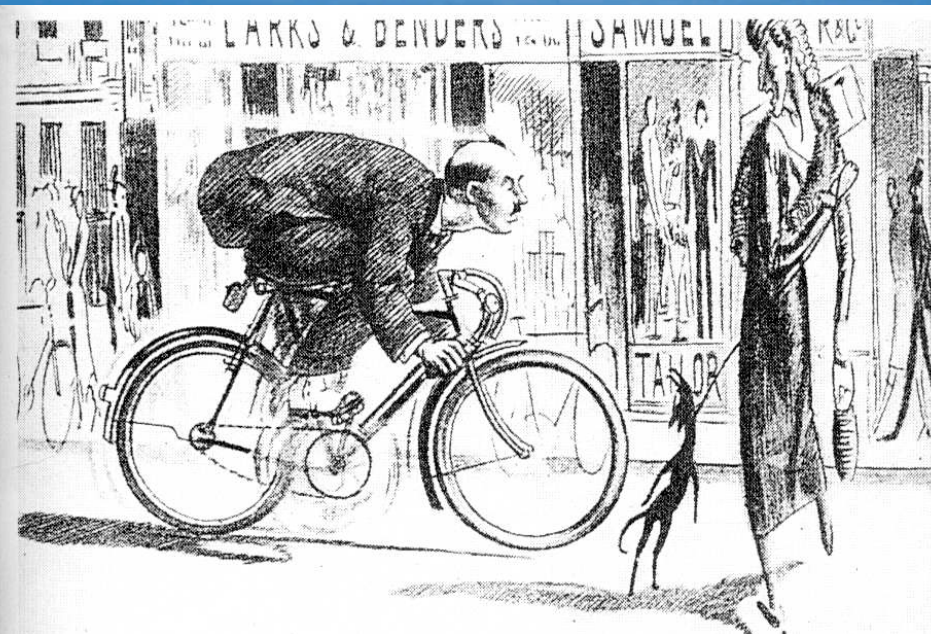
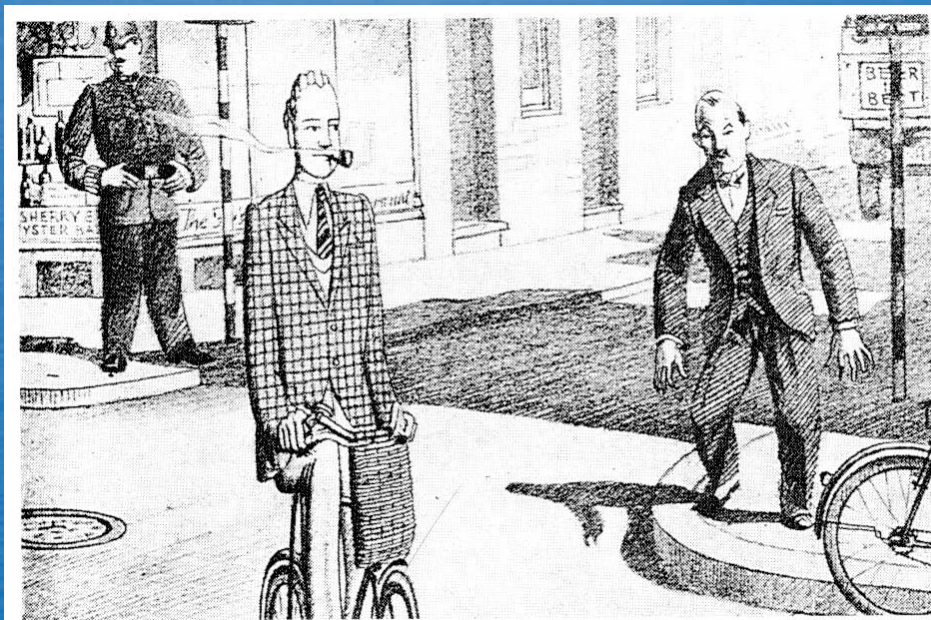
$$V = V_1 + V_2$$

速度の足し算 (特殊相対性理論)

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + (V_1 V_2 / c^2)}$$

光速 + 光速 = 光速





ガモフ「不思議の国のトムキンス」



特殊相対性理論 【静止質量エネルギー】

運動方程式 (ニュートン力学)

$$\frac{dp^i}{dt} = F^i$$

$(ma = F)$



相対論的運動方程式

$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i$$

相対論的エネルギー保存則

$$E \equiv mc^2 \frac{dt}{d\tau} = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$
$$= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

質量とエネルギーは、等価である。
質量が欠ければ、莫大なエネルギーが生じる。

力学 → 相対性理論

一般相対性理論

強い重力場での時空の力学

「空間が歪むのが重力の正体である」

特殊相対性理論

光の速さに近い場合の力学

「時間の進み方は観測者によって異なる」

ニュートン力学

$$F = ma$$

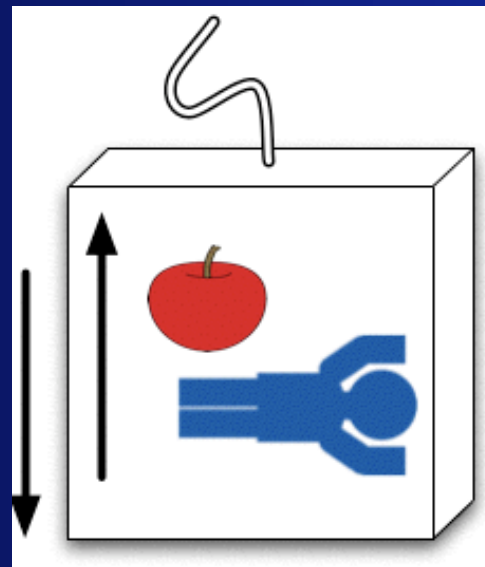
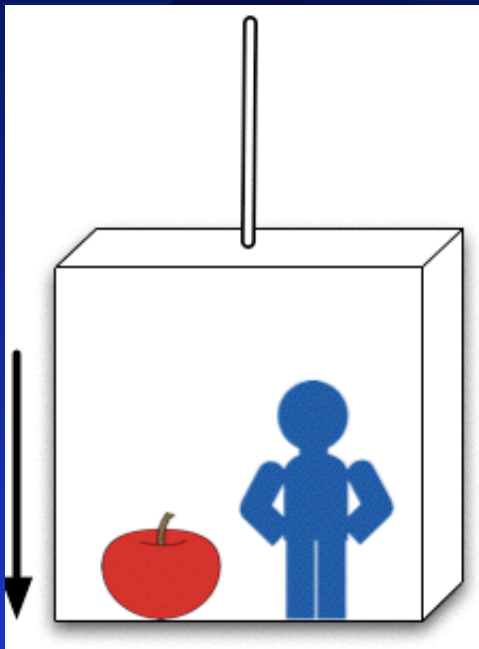
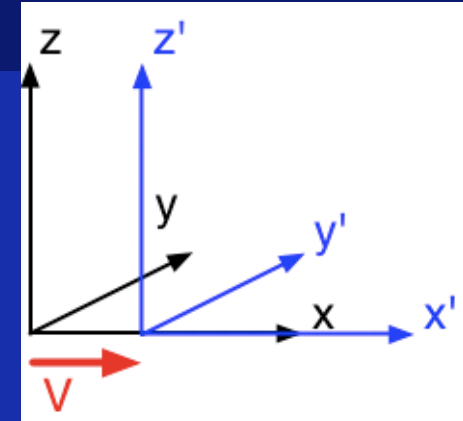
いよいよ

一般相対性理論

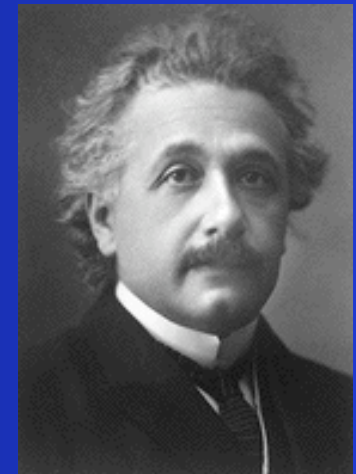
- ◆ 一般相対性理論は、重力の理論。
重い天体は、時空を曲げる。

一般相対性理論【等価原理】

- 特殊相対性理論は、加速運動する座標系を取り扱うことはできなかった。
- 加速度とは何か？



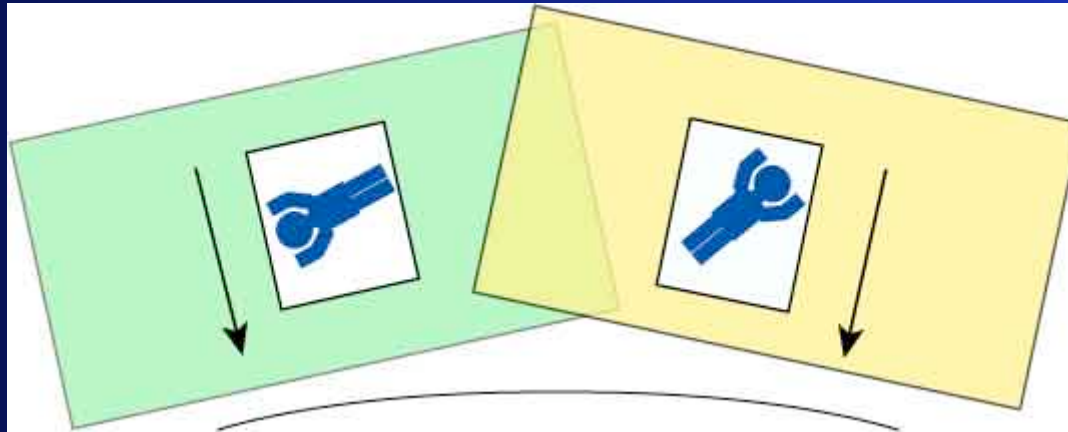
「重力加速度は、自由落下しているエレベータでは相殺されてしまう」
= 加速度は局所的に消去可能
(等価原理)



「生涯で最もすばらしいアイデア」

一般相対性理論【重力の正体】

「重力加速度は、自由落下しているエレベータでは相殺する」
=加速度は局所的に消去可能（等価原理）

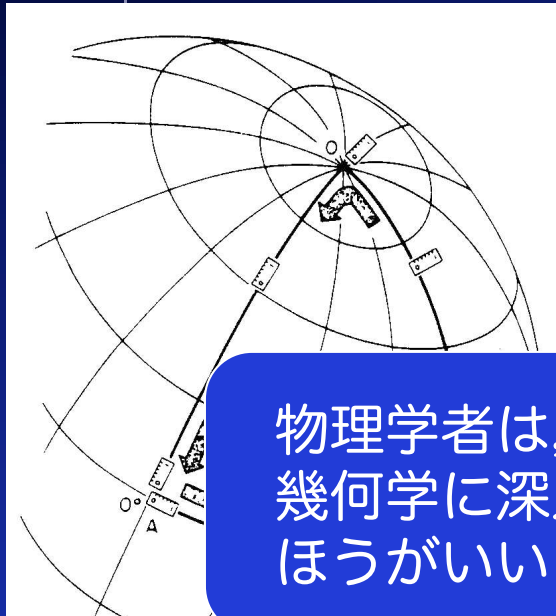


=重力は、大局的には消去できない。
=重力の正体は、時空のもつ曲がり具合である。

曲がった時空の幾何学 = 「一般相対性理論」

一般相対性理論【計量 metric】

曲がった時空の幾何学 = リーマン幾何学



物理学者は、リーマン幾何学に深入りしないほうがいいよ。

4次元距離を一般化した「計量(metric)」.

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ & & g_{yy} & g_{yz} \\ sym. & & & g_{zz} \end{pmatrix}$$

平らな時空(flat spacetime)では,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned}$$



Marcel Grossmann

一般相対性理論【アインシュタイン方程式】

重力場の方程式 (1916)

空間の曲がりかモノの運動を決める \Leftrightarrow モノがあると空間が曲がる

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

アインシュタイン曲率テンソル
〈空間の歪み〉

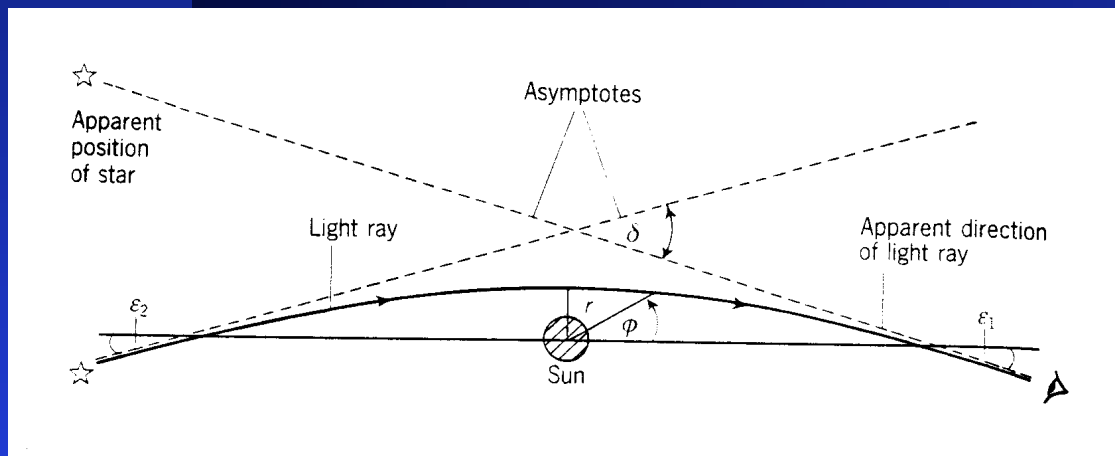
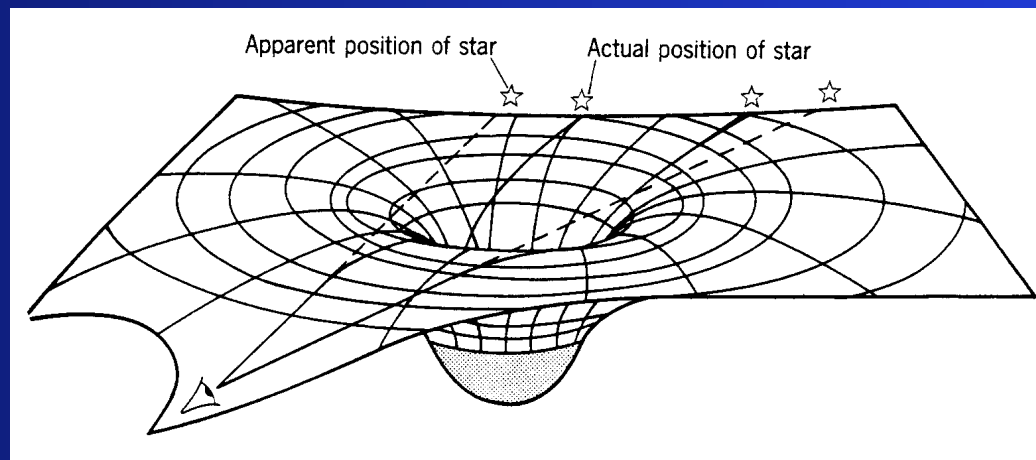
エネルギー運動量テンソル
〈モノの分布〉

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &\equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}) \\ R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &\equiv \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \\ R_{ab} \equiv R^{\mu}_{a\mu b} &\equiv \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{ab} - \partial_b\Gamma^{\mu}_{a\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\Gamma^{\nu}_{ab} - \Gamma^{\mu}_{\nu b}\Gamma^{\nu}_{a\mu} \\ R &= g^{ab}R_{ab}\end{aligned}$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}$$

一般相対性理論の予言【光の曲がり】

光は時空を直進するが、重い物体の周りでは、時空の歪みにより、曲がって進むことになる。



1919年、エディントンが、皆既日食を利用して、光の曲がりを確認（0.875秒角）

一般相対性理論は正しい

Taken from the 22 November 1919 edition of the Illustrated London News.

Coverage in the (more excitable) New York Times.

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

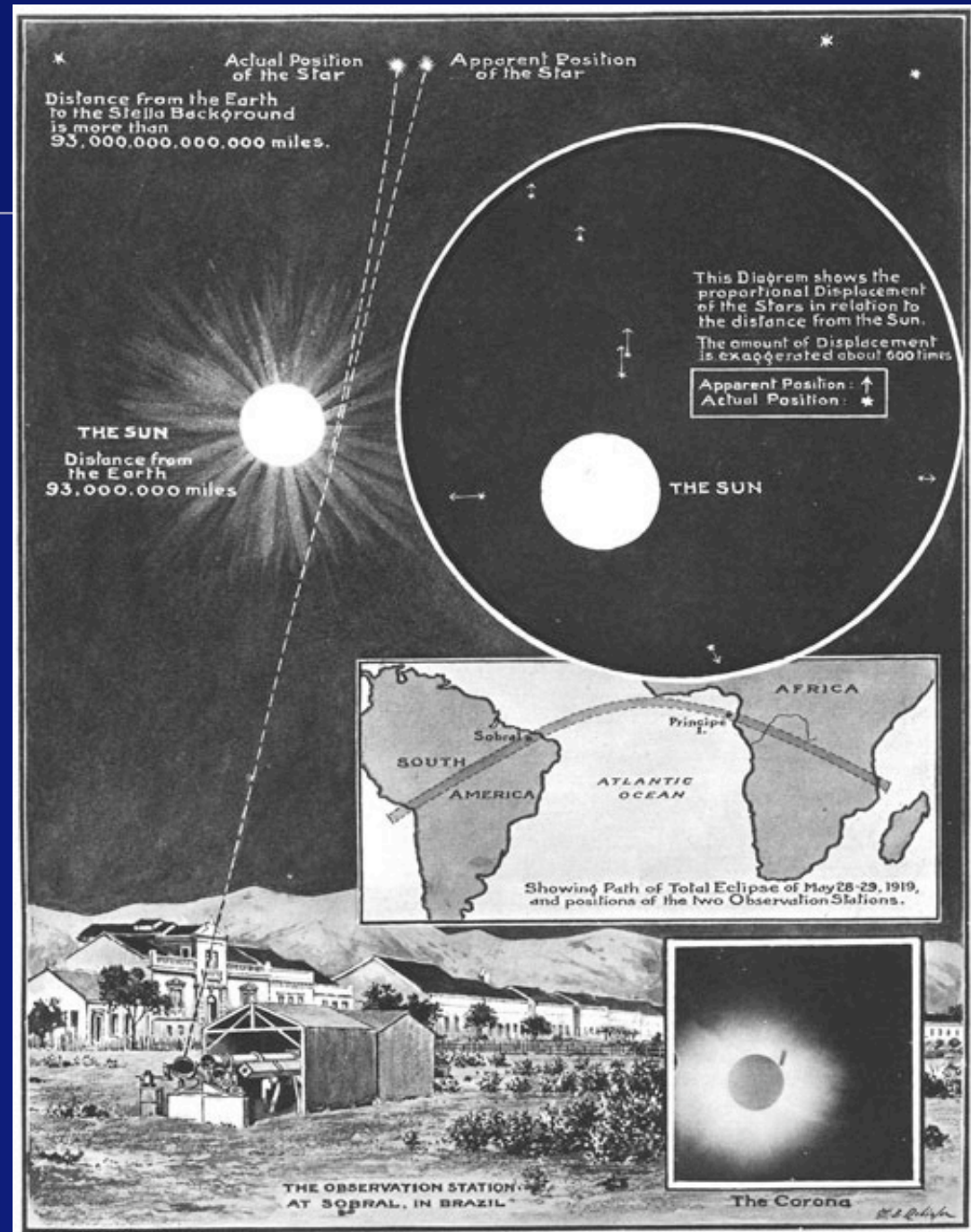
Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could
Comprehend It, Said Einstein When
His Daring Publishers Accepted It.



ブラックホール Black-hole

まず、方程式を解いたのは、シュバルツシルドだった。

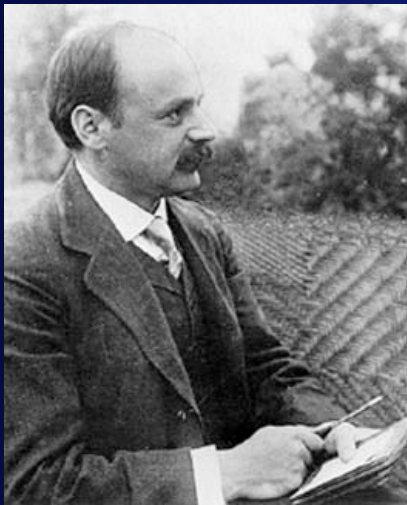
アインシュタインは信じなかったが、
この答えは、ブラックホールを意味していた。

アインシュタイン方程式の解 【シュワルツシルド解】

Schwarzschild (1916)

球対称, 真空でのEinstein方程式の厳密解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$



アインシュタイン方程式の解 【シュワルツシルド解】

Schwarzschild (1916)

球対称, 真空でのEinstein方程式の厳密解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

困ったことに, ……

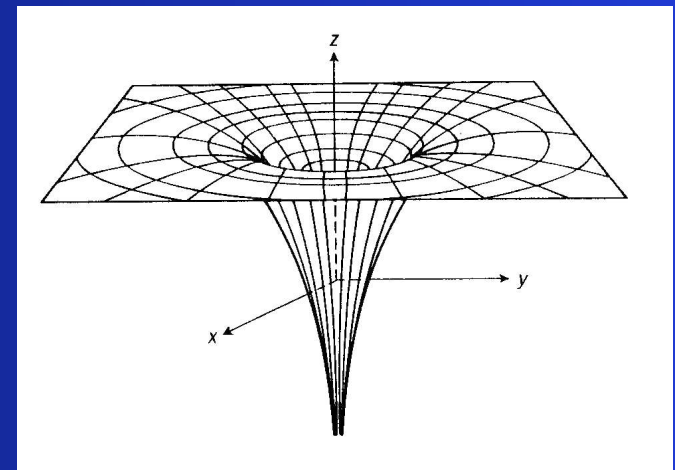
$r=0$ で特異点

⇒ 今でも困ってる

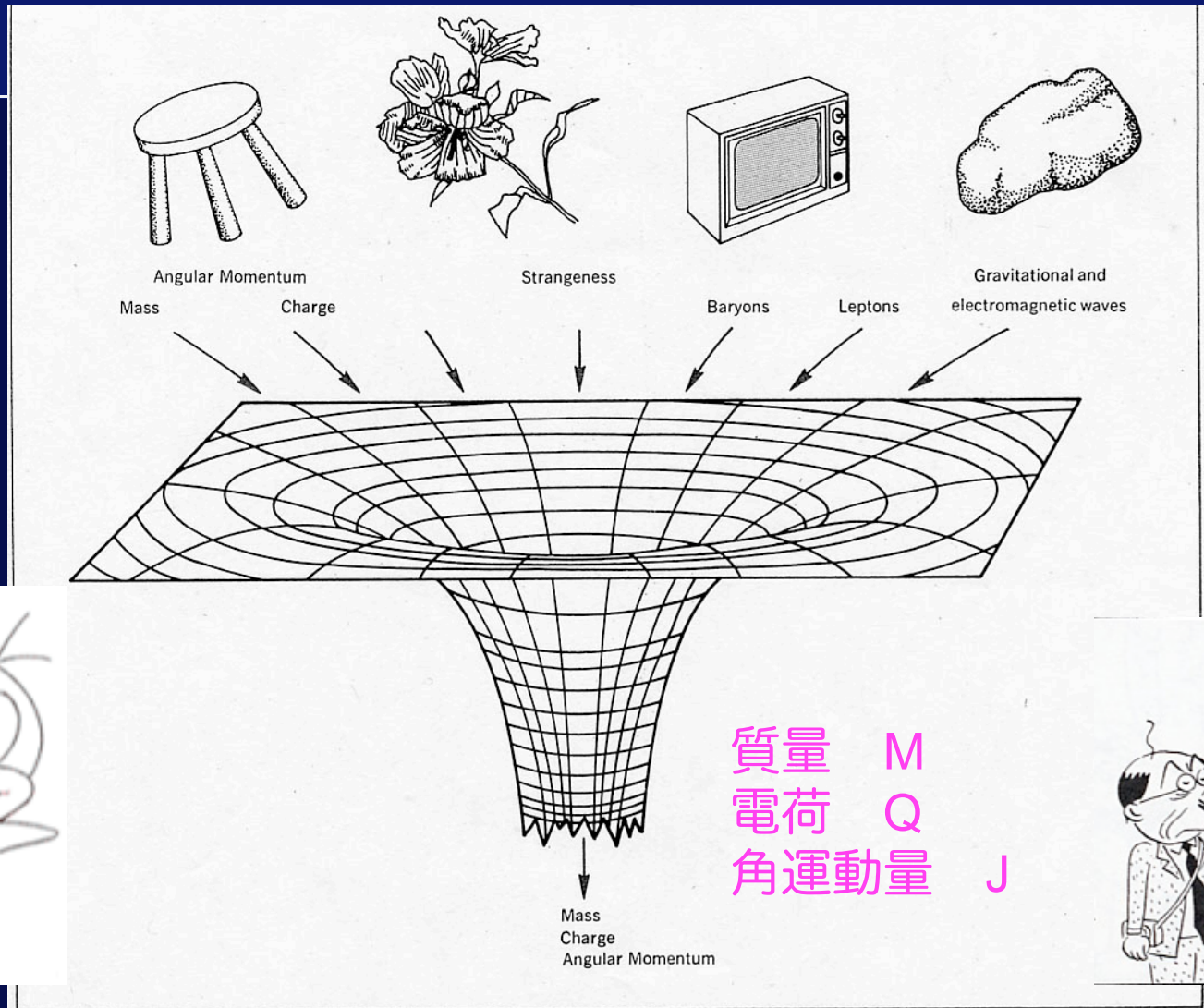
$r=2GM/c^2$ でも特異点

⇒ ブラックホールの境界

太陽なら2Km, 地球なら0.9cm



ブラックホール脱毛定理



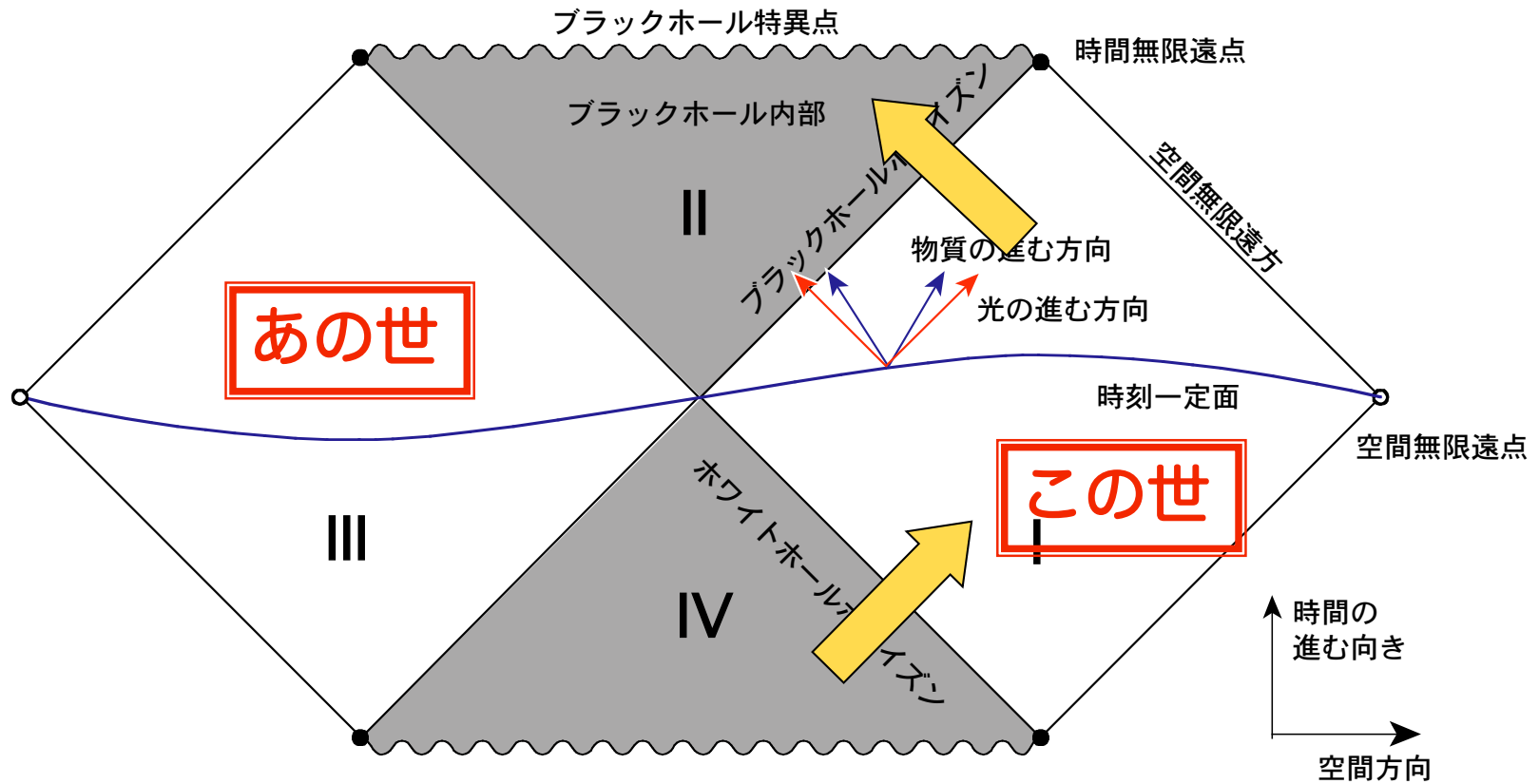
Figurative representation of a black hole in action. All details of the infalling matter are washed out. The final configuration is believed to be uniquely determined by mass, electric charge, and angular momentum. Figure 1

ワームホール wormhole

本当にあるのかどうか誰も知らないが、

もしxxxで、さらにxxxで、さらにxxxで、さらにxxxで、
さらにxxxで、さらにxxxならば、タイムマシンができる？

Schwarzschild Black HoleのPenrose図



ワームホール？

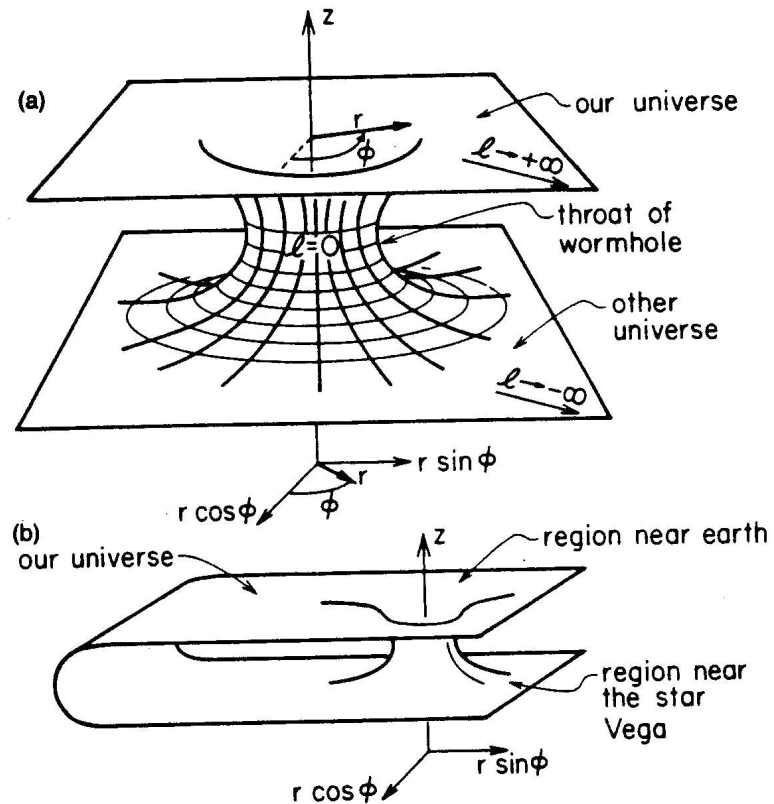
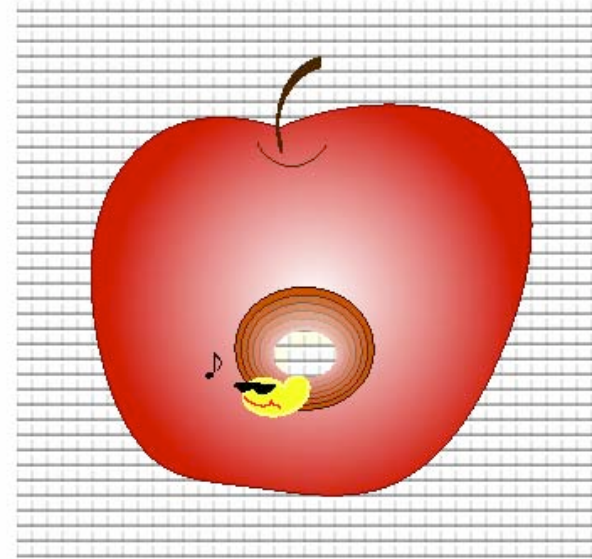


Fig. 1. (a) Embedding diagram for a wormhole that connects two different universes. (b) Embedding diagram for a wormhole that connects two distant regions of our own universe. Each diagram depicts the geometry of an equatorial ($\theta = \pi/2$) slice through space at a specific moment of time ($t = \text{const}$). These embedding diagrams are derived quickly in item (b) of Box 2, and—in a more leisurely fashion—in Sec. III C, where they are also discussed. This figure is adapted from Ref. 1, Fig. 31.5.



物理科学雑誌

parity

パリティ

2003
05

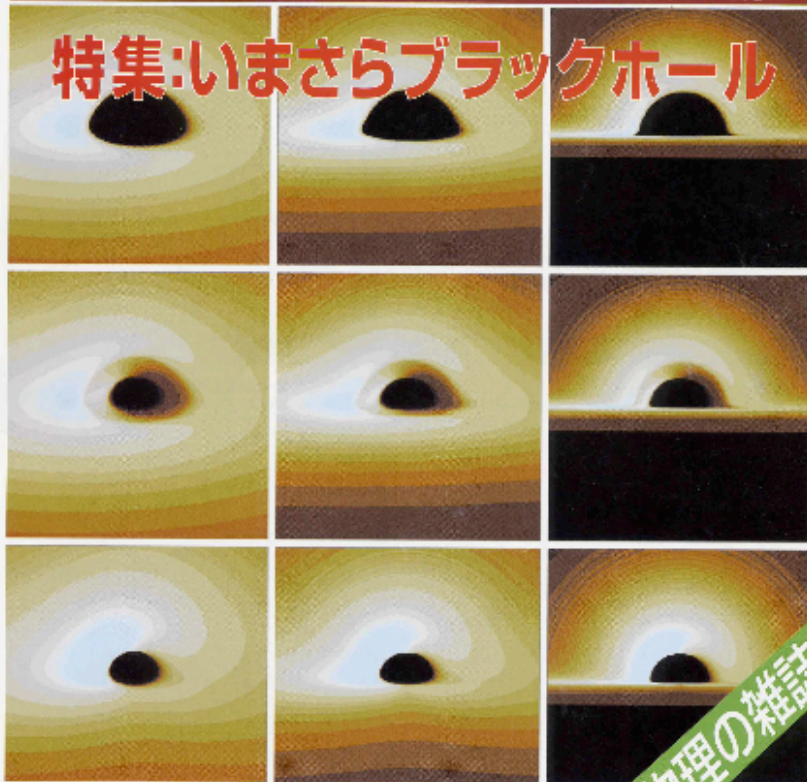
創刊号 01
2002年 11月 10日
発行所 054-8565-1111
〒215-8502 千葉県市川市
0543-8565-1111
PHYSICS TODAY 提携

ブラックホールの誕生に迫る | ブラックホールは黒いのか

ブラックホールはどう見えるか | 明るく輝く黒い穴

ワームホールは、通過可能か? | いまこそブラックホール? | ホワイトホールの死?

特集:いまさらブラックホール



MARUZEN

物理の雑誌

物理科学雑誌

2003
05

パリティ

parity

創刊号 01
2002年 11月 10日
発行所 054-8565-1111
〒215-8502 千葉県市川市
0543-8565-1111
PHYSICS TODAY 提携

ブラックホールの誕生に迫る | ブラックホールは黒いのか

ブラックホールはどう見えるか | 明るく輝く黒い穴

ワームホールは、通過可能か? | いまこそブラックホール? | ホワイトホールの死?

特集:いまさらブラックホール



Physical Science magazine
Physics Today 提携

パリティ

parity
Volume 005

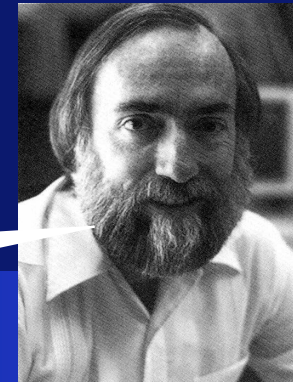
編集長 大塚啓祐
編集 大塚啓祐
発行所 054-8565-1111
〒215-8502 千葉県市川市

編集人 大塚啓祐
村田誠吾

発行所
〒215-8502 千葉県市川市

第1405号(2003年5月)

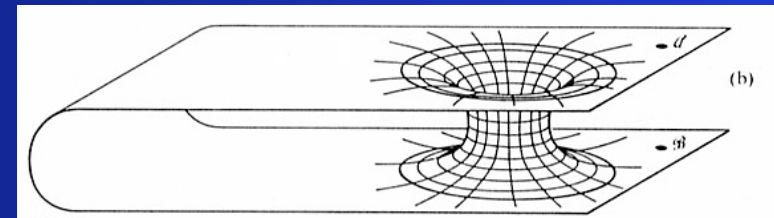
通過可能なワームホール



タイムマシンができる！

Morris, Thorne, Am. J. Phys 56 (1988) 395

「球対称で静的，一般相対性理論，漸近的平坦，潮汐力が人間に耐えられる大きさ，有限時間に通過可能」なワームホールは，**負のエネルギー**を考えれば不可能ではない。

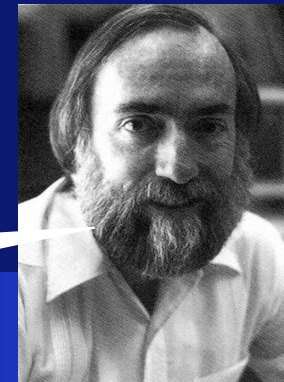


Morris, Thorne, Yurtserver, PRL 61 (1988) 3182

片方の出口を光速近くまでに加速することができれば，旅行者の時間は遅れるので，**過去へ旅**することができる。

本当に？

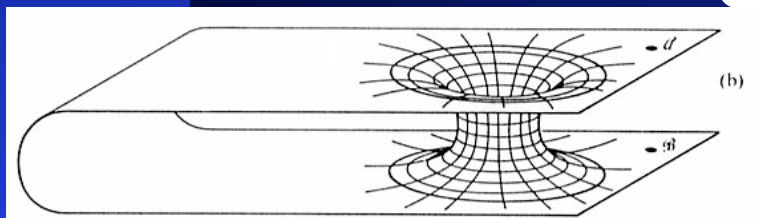
タイムマシンができる！



- もしワームホールが存在して、
- さらにもし負のエネルギーが安定に存在して、
- さらにもしワームホールが通過可能で、
- さらにもし人類が通過可能な技術を持ち、
- さらにもし出口を光速近くで動かすことができるならば、
- さらにもし旅行者が別ルートで同じ場所に戻れば、

タイムマシンに成り得る

No! 時間順序保護仮説



そもそもワームホールは安定なのか

PHYSICAL REVIEW D **66**, 044005 (2002)

Fate of the first traversible wormhole: Black-hole collapse or inflationary expansion

Hisa-aki Shinkai*

Computational Science Division, Institute of Physical & Chemical Research (RIKEN), Hirosawa 2-1, Wako, Saitama, 351-0198, Japan

Sean A. Hayward[†]

Department of Science Education, Ewha Womans University, Seoul 120-750, Korea

(Received 10 May 2002; published 16 August 2002)

We study numerically the stability of the first Morris-Thorne traversible wormhole, shown previously by Ellis to be a solution for a massless ghost Klein-Gordon field. Our code uses a dual-null formulation for spherically symmetric space-time integration, and the numerical range covers both universes connected by the wormhole. We observe that the wormhole is unstable against Gaussian pulses in either exotic or normal massless Klein-Gordon fields. The wormhole throat suffers a bifurcation of horizons and either explodes to form an inflationary universe or collapses to a black hole if the total input energy, is, respectively, negative or positive. As the perturbations become small in total energy, there is evidence for critical solutions with a certain black-hole mass or Hubble constant. The collapse time is related to the initial energy with an apparently universal critical exponent. For normal matter, such as a traveller traversing the wormhole, collapse to a black hole always results. However, carefully balanced additional ghost radiation can maintain the wormhole for a limited time. The black-hole formation from a traversible wormhole confirms the recently proposed duality between them. The inflationary case provides a mechanism for inflating, to macroscopic size, a Planck-sized wormhole formed in space-time foam.

正のエネルギー or 負のエネルギー

Bifurcation of the horizons – go to a Black Hole or Inflationary expansion

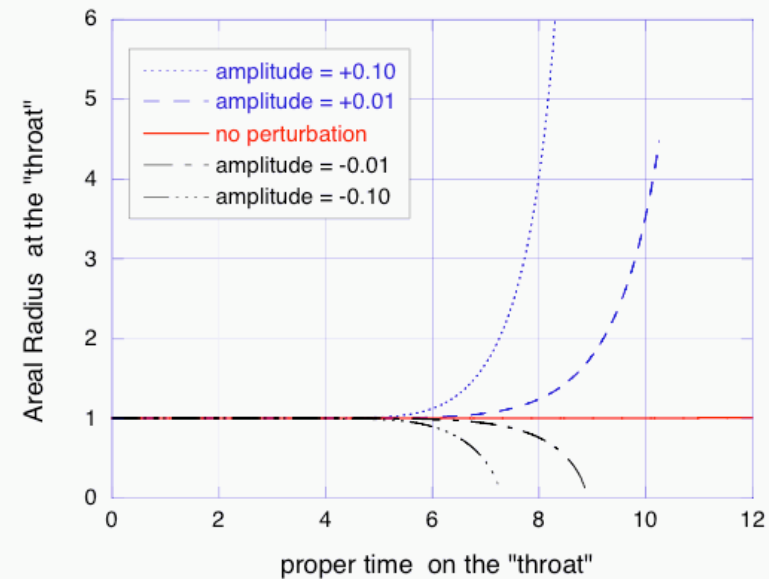
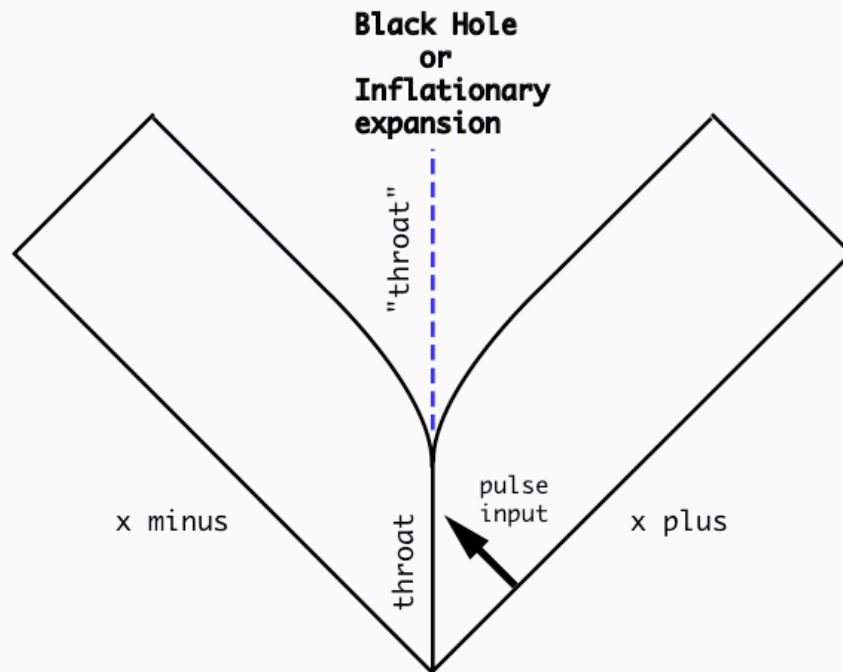


Figure 4: Partial Penrose diagram of the evolved space-time.

Figure 6: Areal radius r of the "throat" $x^+ = x^-$, plotted as a function of proper time. Additional negative energy causes inflationary expansion, while reduced negative energy causes collapse to a black hole and central singularity.

Travel through a Wormhole – with Maintenance Operations!

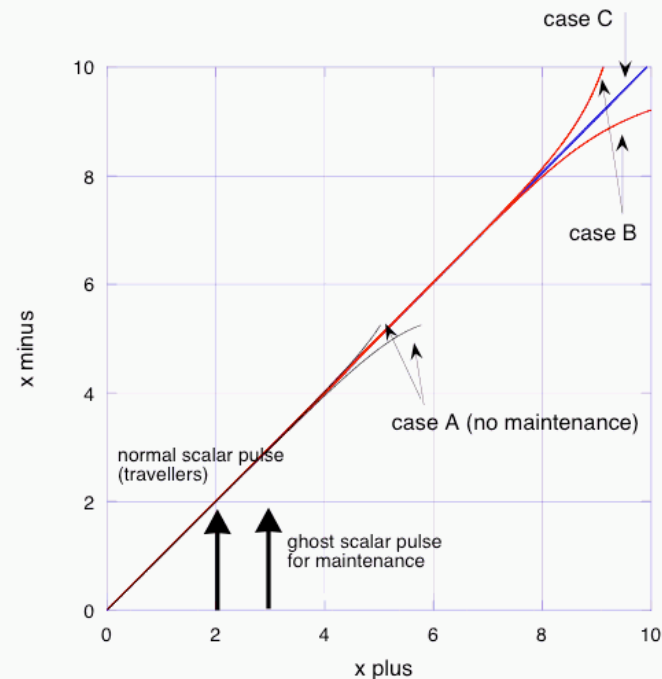


Figure 11: A trial of wormhole maintenance. After a normal scalar pulse, we signalled a ghost scalar pulse to extend the life of wormhole throat. The travellers pulse are commonly expressed with a normal scalar field pulse, $(\tilde{c}_a, \tilde{c}_b, \tilde{c}_c) = (+0.1, 6.0, 2.0)$. Horizon locations $\vartheta_+ = 0$ are plotted for three cases:

- (A) no maintenance case (results in a black hole),
- (B) with maintenance pulse of $(c_a, c_b, c_c) = (0.02390, 6.0, 3.0)$ (results in an inflationary expansion),
- (C) with maintenance pulse of $(c_a, c_b, c_c) = (0.02385, 6.0, 3.0)$ (keep stationary structure upto the end of this range).

ワームホールは不安定だが、
負のエネルギーを銃で出しながら通過することができる！

NewScientist

25 MAY 2002 No2344 WEEKLY £2.30 US\$3.95

Quantum foot in the door

ALL around us are tiny doors that lead to the rest of the Universe. Predicted by Einstein's equations, these quantum wormholes offer a faster-than-light short cut to the rest of the cosmos—at least in principle. Now physicists believe they could open these doors wide enough to allow someone to travel through.

Quantum wormholes are thought to be much smaller than even protons and electrons, and until now no one has modelled what happens when something passes through one. So Sean Hayward at Ewha Womans University in Korea and Hisa-aki Shinkai at the Riken Institute of Physical and Chemical Research in Japan decided to do the sums.

They have found that any matter travelling through adds positive energy to the wormhole. That unexpectedly collapses it into a black hole, a supermassive region with a gravitational pull so strong not even light can escape.

But there's a way to stop any would-be traveller being crushed into oblivion. And it lies with a strange energy field nicknamed "ghost radiation". Predicted by quantum theory, ghost radiation is a negative energy field that dampens normal positive energy. Similar effects have been shown experimentally to exist.

Ghost radiation could therefore be used to offset the positive energy of the travelling matter, the researchers have found. Add just the right amount and it should be possible to prevent the wormhole collapsing—a lot more and the wormhole could be widened just enough for someone to pass through.

It would be a delicate operation, however. Add too much negative energy, the scientists discovered, and the wormhole will briefly explode into a new universe that expands at the speed of light, much as astrophysicists say ours did immediately after the big bang.

For now, such space travel remains in the realm of thought experiments. The CERN Large Hadron Collider in Switzerland is expected to generate one mini-black hole per second, a potential source of wormholes through which physicists could try to send quantum-sized particles. But sending a person would be another thing. To keep the wormhole open wide enough would take a negative field equivalent to the energy that would be liberated by converting the mass of Jupiter.

Charles Choi

More at: www.arxiv.org/abs/gr-qc/0205041

タイムマシン

- 未来へ行くのは（理論的に）簡単
光の速さに近いスピードのロケットに乗れば、
ウラシマ効果で未来へ行ける
- 過去へ行くのは（理論的にも）難しい
技術的にも理論的にも苦しい苦しい
- 次の皆既日食は、日本では2035年。
- 待てない人は
2010年7月11日（イースター島）
2012年11月13日（オーストラリア）
2013年11月3日（大西洋、アフリカ）
2015年3月20日（グリーンランド）
2016年3月9日（東南アジア・太平洋） . . .