

## アインシュタインが16歳のときに考えたこと — 相対性理論とブラックホール入門 —

真貝寿明 (しんかいひさあき, 大阪工業大学)

私たちのまわりで見られる自然現象も、宇宙のかなたで見られる天体現象も、同じ法則で説明できます。今から300年ほど前に、ヨハネス・ケプラーが惑星の運動法則を発見し、アイザック・ニュートンが惑星の運動法則を「万有引力(ばんゆういんりょく)」という力を持ち出して惑星の運動を説明することに成功しました。ところが、200年後、アルバート・アインシュタインが、ニュートンの理論を、もっと大きな「相対性理論」という形で広げました。今日は、このような、宇宙に関する物理法則の話を紹介합니다。

### 1 惑星の運動は「だ円」を描く

#### 1.1 ケプラーの惑星運動の法則

ケプラーの惑星運動の法則 (1609年, 1618年)

- 第1法則 **だ円軌道の法則**  
惑星は太陽を1つの焦点とするだ円軌道を描く。
- 第2法則 **面積速度一定の法則**  
太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く扇形の面積(面積速度)は、惑星それぞれについて一定である。
- 第3法則 **調和の法則**  
惑星の公転周期  $T$  の2乗と、惑星の描くだ円の長軸半径(長軸の長さの半分)  $R$  の3乗の比  $T^2/R^3$  は、惑星によらず一定である。



図1: ヨハネス・ケプラー (1571-1630)

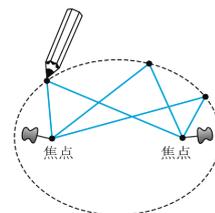


図2: 「だ円」は2つの焦点をもつ。

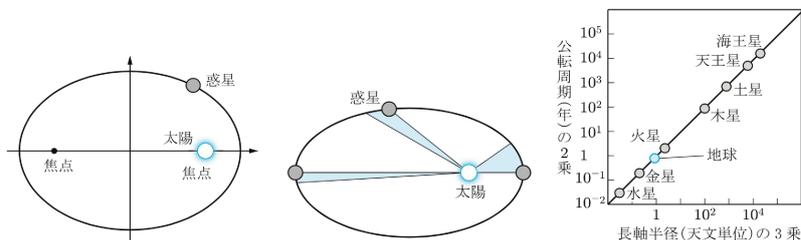


図3: ケプラーの惑星運動の法則

## 1.2 ニュートンの運動法則

ニュートンの運動法則 (1687年)

- 第1法則 慣性の法則  
何も力がはたらかなければ、物体は等速直線運動を続ける。
- 第2法則 運動の法則  
力がはたらくと、物体には加速度が生じる。
- 第3法則 作用反作用の法則  
一方に力を加えると、同じ大きさで逆向きの力が反作用として生じる。

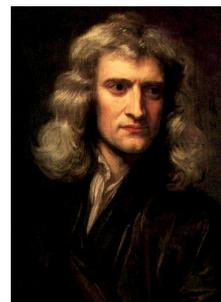


図4: アイザック・ニュートン (1642-1726)

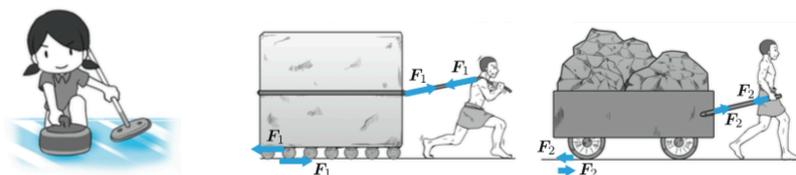


図5: (左) 慣性の法則。(右) 作用反作用の法則。

$$\text{速度} = \frac{\text{動いた距離}}{\text{かかった時間}}, \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{加速度} = \frac{\text{変化した速度}}{\text{かかった時間}}, \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

英語

速さ = スピード (speed)  
速度 = ベロシティ (velocity)  
加速度 = アクセラレーション (acceleration)

万有引力

すべての物質は、たがいに引力を及ぼしあっている。

- リンゴも地球もお互いに引っ張り合っている。これが重力。
- 地球も月もお互いに引っ張り合っている。
- 太陽も地球もお互いに引っ張り合っている。

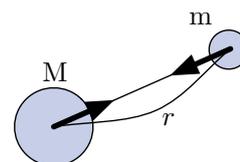


図6: 万有引力の法則



図7: 月が地球に落ちてこないのはなぜ?

(A) 運動量保存則

衝突の前後では，全体の運動量は保存する．



$$\text{運動量} = \text{質量} \times \text{速度}, \quad p = m \times v$$

図 9: 氷の上で，太った人とやせた人がお互いに相手を押し出すと... ?

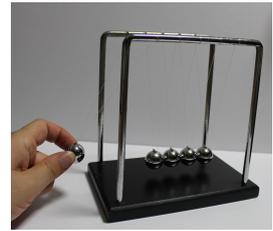


図 8: ニュートンのゆりかご

(B) エネルギー保存則

位置エネルギーと運動エネルギーの合計は一定である．

$$mgh_0 + 0 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

位置エネルギー + 運動エネルギー = 一定

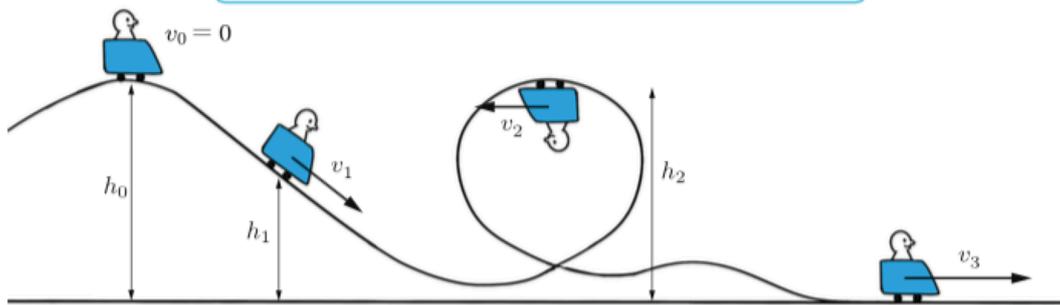


図 10: ジェットコースターは，はじめに一番高いところまで引き上げられて，あとはすべりおりのだけ．

(C) 角運動量保存則

回転しようとする運動量（角運動量）は，保存する．

- 角運動量 = 半径 × 質量 × 速度,  $L = r \times m \times v$
- ケプラーの面積速度一定の法則は，角運動量の保存則だった．

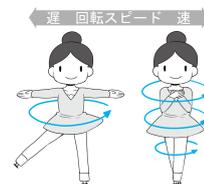


図 11: フィギュアスケートの回転．はじめに大きく手を広げ，あとは手を体につけるとはやく回る．

## 2 アインシュタインの考えたこと

### 2.1 若いころのアインシュタイン

- アルベルト・アインシュタインは、1879年3月14日、ドイツ南部の中都市ウルムで、父ヘルマン、母パウリーネの長男として生まれた。2歳下には妹マヤが生まれた。
- 4歳か5歳の頃、父親から方位磁石を見せられて、磁石の針がいつも決まった方向を向いていることに非常に興味を持った。ものごとの背後には深く隠された何かがあるにちがいない、という考えをこのときに持ったそうだ。
- また、「ピタゴラスの定理」について説明されたときには、この定理をなんとか自分で証明しようと努力し、ついに証明方法の1つを発見したという。証明できた達成感が、楽しさになったそうだ。12歳でユークリッドの『平面幾何学』の本に出会ったときには、幾何学の「明瞭さと正確さ」に深い感銘を受けたという。
- 数学と科学は得意だったが、それ以外は苦手だった。高校生のとき、とても優秀だったので、大学の入試を特別に受けさせてもらった。結果は数学と科学は十分に合格点だったが、歴史・地理・国語の得点が足りずに不合格となる。浪人一年。

#### ■ 16歳のときの疑問

光のはやさで飛べることができたら、自分の目の前に置いた鏡に自分の顔が映るのだろうか？ 16歳のときに、ふと考えたこの疑問が、10年後に相対性理論となる。

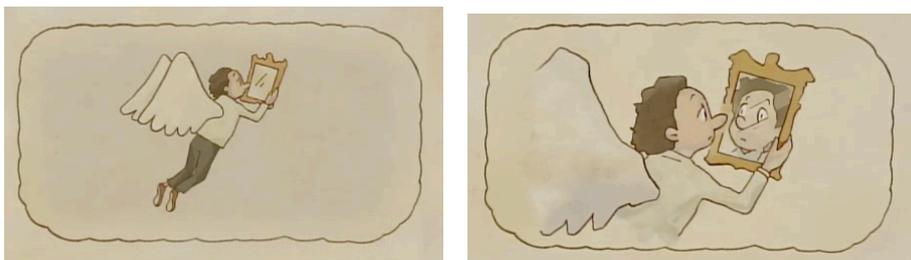


図 12: 光のはやさで飛べることができたら、自分の目の前に置いた鏡に自分の顔が映るのだろうか？

## 2.2 特殊相対性理論

### ■ 電気と磁気のなぞ

導線に電気を流すとまわりの磁石が動いたり、磁石の間で導線のループを回転させると電気が発生する。このような電磁誘導現象は、ファラデーによって発見された。電気と磁気との密接な関係をまとめて電磁気学として基礎方程式を完成させたのがマクスウェルである。1864年のことだった。

マクスウェルの方程式には電磁波の伝わる速さ（光速）が式の中に登場していた。これは不思議なことだった。「光速」は誰から見た速さなのか、という疑問である。

物体の速度の測定は、観測する人の速度によって変わってくる。例えば、時速 120 km で暴走している車をパトカーが時速 140 km で追いかけているとしよう。道路脇に止まった人から見れば、120 km/h、140 km/h という速度表示はそのまま正しいが、逃げている車からパトカーを見れば、パトカーは相対速度 20 km/h で追いかけてくるように観測される。速度は、誰から観測した速度かを始めに定義しないと意味がないのである。



図 13: 電磁気学で生じた疑問。

### ■ アインシュタインの提案：特殊相対性理論

アインシュタインは、『動いている物体の電気力学』というタイトルの1905年の論文で、次の2つの簡単な仮定によって電磁気学の問題が説明できることを示した。

#### 特殊相対性原理

- (a) 相対性原理：物理法則は、どのように運動をする人からみても（どのような座標系から見ても）同じ形にならなくてはならない。
- (b) 光速一定の原理：真空中の光の速度は、どのような座標系から見ても同じである。

この仮定をすれば、確かに誰からみても光の速度は一定なので、方程式は正しいことになる。しかし、私たちの日常の感覚とは違う話になる。



図 14: アルベルト・アインシュタイン (1879–1955)

## ■ 速度のたし算

「どのような座標系から見ても光速は同じである」という原理は、日常の感覚からは信じがたいが、そうなるような新しい速度の足し算をアインシュタインは提案した。

ニュートンの力学では、 $v_1$  の速度で動く電車の中で、 $v_2$  の速度でボールを投げた場合、ボールの速度を地上から見ると  $v_1 + v_2$  になる。これは我々が日常的に正しいと思っている速度の足し算である。光の速度  $c$  で飛ぶロケットが進行方向に光を出したら、 $2c$  の速度の光になりそうである。

しかし、相対性理論では、速度の足し算は  $v_1 + v_2$  ではなく、

$$v_1 \text{ と } v_2 \text{ の和は、} \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 \times v_2 / c^2)} \text{ となる}$$

と結論する。

試しにいくつかの値を代入してみよう。

- $v_1$  も  $v_2$  も光速の  $\frac{1}{1000}$  のとき、
$$\frac{0.001 + 0.001}{1 + (0.001 \times 0.001)} =$$
- $v_1$  も  $v_2$  も光速の 1% のとき、
$$\frac{0.01 + 0.01}{1 + (0.01 \times 0.01)} =$$
- $v_1$  も  $v_2$  も光速の 10% のとき、
$$\frac{0.1 + 0.1}{1 + (0.1 \times 0.1)} =$$
- $v_1$  も  $v_2$  も光速の 90% のとき、
$$\frac{0.9 + 0.9}{1 + (0.9 \times 0.9)} =$$
- $v_1$  も  $v_2$  も光速の 99% のとき、
$$\frac{0.99 + 0.99}{1 + (0.99 \times 0.99)} =$$
- $v_1$  も  $v_2$  も光速ののとき、
$$\frac{1 + 1}{1 + (1 \times 1)} =$$

つまり、たとえ速度  $c$  のロケットから光を前方に放出しても、地上の人からは、光は光速  $c$  で伝播することになる。

我々が日常に感じる  $v_1 + v_2$  という足し算は、光速よりずっと遅い速度を考えているので「近似的に」正しい式になっている、というのが相対性理論の結論である。

### ■ 時間の進み方が相対的になること

光速一定の原理を使うと、光を使った時計を作れば正確な時刻が測れるはずだ。例えば、長さ 50cm の筒の両端に鏡をつけ、光を往復させる装置を考えよう。1 往復で 1 m だから、光が 2 億 9979 万 2458 回往復するごとに 1 秒とすれば正確な時計になる。これを光時計と呼ぼう。

光時計をロケットに載せたとする。ロケットが飛ぶと、光時計の筒を 1 往復するために光が進まなければならない距離が増える。地球上で止まって見ている人の光時計が 1 秒刻んだときでも、ロケット内の光時計の光はまだ 1 往復できていない。しかし、ロケットの中の人にとっては、光時計が 1 秒を刻む時刻が正確のはずだ。

どちらも矛盾無く考えようとするならば、地球上の 1 秒とロケット内の 1 秒の刻み方がずれていると考えれば良い。つまり、時間の進み方は観測する人によって変わることになる。ロケットが速ければ速いほど、地球の 1 秒にくらべてロケットの 1 秒は遅くなる。

速いスピードで移動しているほど、1 秒の間隔は静止している人より長くなる。

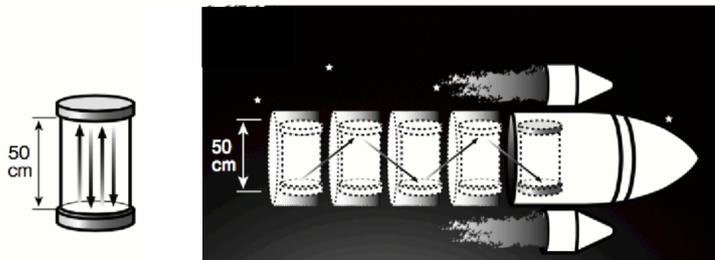


図 15: 光時計をロケットに載せて時間を測ると、地上のときより 1 秒の刻みは遅くなる。ロケット内では、光を基準に 1 秒を測るので、地上よりもロケット内の時間の進みは遅くなる。

### ■ 未来へ行こう！

特殊相対性理論によれば、高速で動いている人ほど 1 秒の間隔は開いてくる。計算式で表すと、速度  $v$  で移動している人の時間  $\Delta T'$  は、静止している人の時間  $\Delta T$  と同じではなく、次式になる。

$$\Delta T' = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta T \quad (2.1)$$

この式にいくつか数字を入れると、時間の進み方は、 $v$  が光の速さ  $c$  に近づくほど極端に遅くなっていくことがわかる。(次のページの表と図を参照のこと)。

地球を周回している国際宇宙ステーション (ISS) は、秒速 7.8 km ほどの速度だが、この速度は光速の 10 万分の 2.6 でしかないので、たとえ 1 年間 ISS に乗っていたとしても、残念ながら地球上との時間差は、わずかに 0.01 秒程度でしかない。しかし、光速の 80% で飛ぶロケットならば、ロケット内の 1 年は地球上の 1 年 8 ヶ月になる。もし光速に近い速さで飛ぶロケットがあれば、ロケットに乗った人はなかなか歳をとらないことになる。

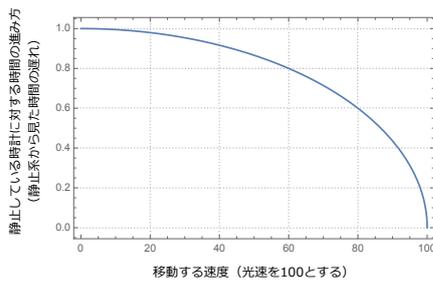


図 16

$v$	$\sqrt{1 - (v/c)^2}$
$0.1 c$	0.99499
$0.5 c$	0.86603
$0.9 c$	0.43589
$0.99c$	0.14107
$0.999c$	
$0.9999c$	

浦島太郎は、竜宮城で3年間過ごし、自分の村に戻ってきたら誰も知り合いがいなかった。これを例えば300年経っていた、とするならば、竜宮城が光の速さの99.99499%で動くロケットだった、と考えれば計算が合う。

だから、この意味で、未来へ行くタイムトラベルは可能 (!! ) と言える。光速に近いロケットが実現すれば、そのロケットで旅行して帰ってくるだけでタイムマシンになるのだ。

### ■ ミュー粒子の寿命

「運動するものの時間の進み方が遅くなる」という事実は、光の速さに近い運動でないと顕著にならない。未来へ旅するタイムマシンの原理ではあるけれど、人間が乗ったマシンで実験することはなかなか難しい。

しかし、この結論が正しいことは素粒子の寿命が伸びることで確認されている。宇宙から地球へ飛び込んでくる高エネルギーの素粒子(宇宙線という)のうち、陽子が地球の大気圏でミュー粒子と呼ばれる素粒子に変化する反応がある。ミュー粒子は不安定な素粒子で、寿命が100万分の2.2秒ほどしかなく、すぐに電子・電子ニュートリノ・ミューニュートリノの3つに分解してしまう。ミュー粒子が光速度で飛んだとしても、最長で600m位移動すれば、分解してしまうことになる。地球の大気圏の厚さは、およそ20 kmあるから、地表でミュー粒子を見ることは極まれのはずだ。

ところが、地表では、宇宙から降り注ぐミュー粒子が多数観測されるのである。ミュー粒子が光速度に近い速さで移動するため、特殊相対性理論の効果でミュー粒子自身の感じる時計が遅くなっているのだ。観測から、ミュー粒子の寿命が50倍程度に伸びていることがわかっていて、このデータから、逆にミュー粒子の飛んでくる速さを計算することができている。

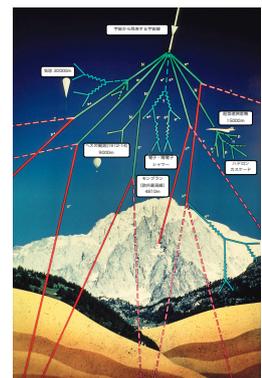


図 17: 宇宙から降り注ぐ宇宙線から生まれるミュー粒子が地上に届くのは、ミュー粒子の寿命が伸びているからだ。

### 2.3 重力の理論：一般相対性理論

「相対性理論」が追い求めたのは、どんな座標系から見ても物理法則は同じ形に書けるはずだ、という理想の運動方程式である。アインシュタインは、1905年の相対性原理の発表後、こんどは加速度運動を含めた原理を考えはじめた。

例えば動き始めた列車にいる人は、後ろ向きに力を受けるように感じる。逆にブレーキをかけた列車にいる人は、前向きに力を受けるように感じる。加速度運動をしている空間では、観測者は加速度と逆向きに慣性力を感じるからだ。しかし、慣性力は列車内にいる人だけに存在する「見かけの力」であって、物理的なものではない。アインシュタインは、なんとか「見かけの力」のいない物理法則を導こうとした。

加速度運動するもっとも簡単な例は、重力である。28歳の頃、アインシュタインは、後に「人生で最も幸福なひらめき」と振り返るアイデアを得た。自由落下するエレベータの思考実験である。ワイヤの切れたエレベータは、重力加速度で自由落下する。エレベータの中にいる人は、下向きの重力に加えて、同じ大きさの慣性力を上向きに受けるので無重力状態になる。つまり、観測者は重力の効果を感じず、特殊相対性理論が適用できる空間になる。アインシュタインのアイデアは、「加速によって生じた慣性力と重力は区別できない」という等価原理だった。

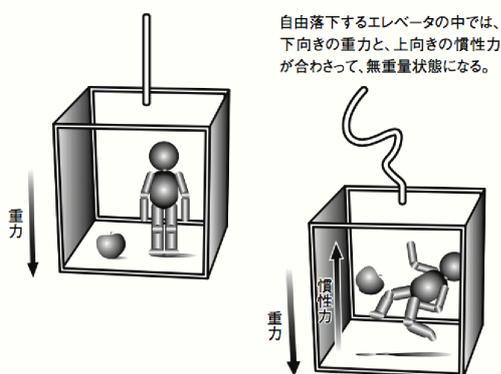


図 18: エレベータのワイヤが切れて自由落下すると、無重量状態になる。

しかし、この考えを進めると、重力が特別なはたらきをすることがわかってくる。例えば、地球の重力に引かれて自由落下するエレベータを考えよう。普通のエレベータ1台が自由落下するならば、確かにその瞬間には等価原理により、重力の影響は打ち消すことができる。しかし、仮にエレベータがとてつもなく大きくて、地球の半径位だったとしよう。エレベータの両端では重力の向きが異なるため、1つの慣性力で重力を相殺することは不可能だ。

つまり、すごく小さな領域で重力を消去できたとしても、より大きな空間・長い時間で運動を観測すれば、重力が働いていることがわかる。重力は小さな領域では相殺できても、大きな領域では消去できないのだ。アインシュタインは、重力の正体は力ではなく、時空のもつ特有の構造として説明できるのではないかと考えた。

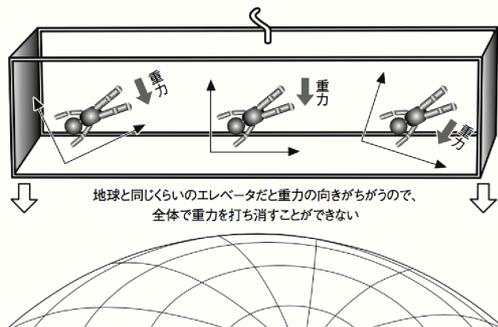


図 19: 小さな領域で重力を消去できたとしても、全体で重力を消すことはできない。地球の半径ほど大きなエレベータを考えれば、重力の方向が違うことから、それは明らかだ。

アインシュタインは、「質量のある物体のまわりの時空はゆがむ」というアイデアで重力の正体を説明しようとした。重い物体をトランポリンに載せると、トランポリンの膜がくぼみ、もし膜の上に水滴やボールがあれば、それらは膜のくぼみによって動き出すだろう。重力による運動は、それぞれの物体が時空のゆがみを感じているから発生する、という考えである。もし、とてつもなく重くて小さな星があれば、トランポリンは急激に落ち込み、脱出不可能になる。(さらに重いと、トランポリンが破けることになる)。

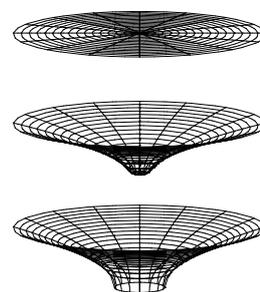


図 20: 時空のゆがみ = トランポリン

重力場の方程式 (アインシュタイン方程式, 1915 年)

重力の正体は、時空のゆがみである。その関係は、次の式で表される。

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{時空のゆがみ}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{質量の分布}} \quad (2.2)$$

左辺はリーマン幾何学に基づいて時空がどのように曲がっているのかを表している。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す量である。

重力場の方程式 (アインシュタイン方程式)  
(Einstein equation)

1915 年 11 月に導き出された。一般相対性理論は、この式が結論になる。

「物質が存在すれば時空が曲がる。時空が曲がると物質も(光も)それに添って動く」ことを 1 つにまとめた美しい式。

さらに、アインシュタインは、重力も有限の速さで伝わるものと考えた。重力の正体が時空のゆがみであれば、時空が伸びたり縮んだりする性質が波のように周囲に広がってゆく、という考えである。これが重力波として予言されたものである。

## 2.4 ブラックホールと重力波

アインシュタインの没後、光さえも脱出できない重くて小さな天体があることがわかり、ブラックホールと命名された。今では、銀河系の中心には巨大なブラックホールがあることがわかっている。ブラックホール自身は見えないが、まわりの天体の運動から、ブラックホールの存在がわかっている。

### ■ 銀河中心には超巨大ブラックホール

最近では、はっきりと楕円運動する例が示されている。天の川銀河の中心（いて座の方向）を動く星々である。電波望遠鏡で10年以上観測することにより、銀河中心には、右図のような軌道を描く星 S1, S2, ... が存在することがわかってきた。どれもが楕円運動をしており、それらの焦点は一致する。すなわち、この焦点に非常に大きな質量をもつ天体があることがわかる。計算の結果、銀河中心には、太陽質量の420万倍もある超巨大ブラックホールが存在していることがわかってきた。ブラックホールそのものは小さくて、現在の望遠鏡では「黒い穴」を見ることまではできないが、周囲の星やガスのふるまいから、その存在が確信されるのである。

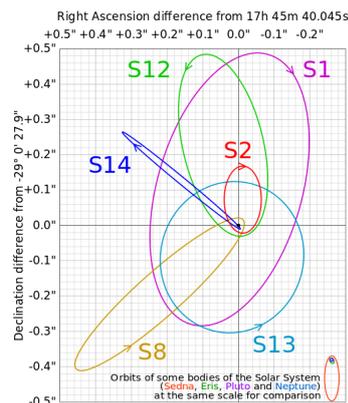


図 21: 天の川銀河の中心付近 (Sgr A\*) を運動する星の軌跡。

### ■ 「黒い穴」を見ることはできるのか

天体望遠鏡で、「黒い穴」を見ることのできるのか。ハワイやチリなどの電波望遠鏡を同時に銀河中心に向けて観測し、ブラックホールそのものの姿が見えるかどうかの観測も実施されている。もしかしたら、今年か来年に「見えた！」という報告がされるかもしれない。

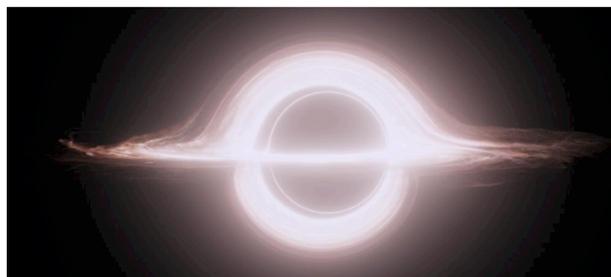


図 22: 映画「インターステラー」に描かれたブラックホールのコンピュータ・グラフィックス。

## ■ 重力波の初検出

いまから3年前の2015年9月、アインシュタインが予言していた重力波が、はじめて観測された。ブラックホールが2つ連星をつくっていたものが最後に合体したとき、巨大な質量エネルギーが宇宙全体に広がるだろうという予想は以前からあったが、技術的な進歩もあって、ようやく発見された。これからは、天体望遠鏡を使うだけでなく、重力波望遠鏡を使った観測も可能になる。人類は新しい「目」を手に入れたことになった。

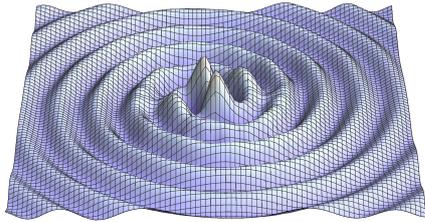


図 23: 2つの連星ブラックホールから周囲に出される重力波のイメージ。中央の2つの大きな山のところに星があり、2つの星が次第に近づいて合体するまでに、時空にゆがみを引き起こす。ゆがみは波として周囲に伝播する。

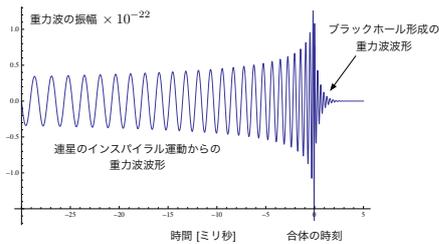


図 24: 2つの連星が合体するときに予想される重力波の波形。

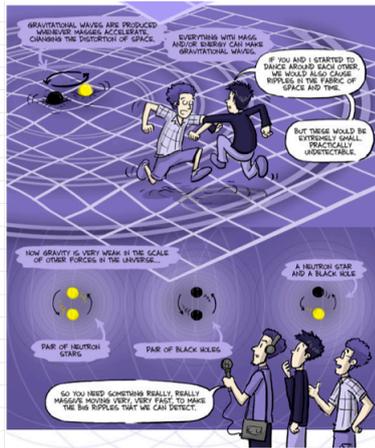


重力波って何？

時間と空間のじゅうたんを伝えるさざ波だよ。

大きなゴムのシートを考えてみて、トランポリンにボールをのせるときと同じで、重いものをのせると沈むよね、重ければ重いほど、重力によってシートは曲がる。

地球が太陽を回るのは、太陽の重力が大きくてシートを沈み込ませていて、地球が太陽の近くにつかまっているからだ。地球はまっすぐ進もうとしても太陽のまわりをまわってしまう。惑星を引っ張っている力ではなく、時空が曲がっているんだ。



重力波は大きな質量が空間を曲げるほど加速していると発生する。質量やエネルギーがあれば重力波は発生する。僕と君が互いに手を組んでダンスをしたら、時空のじゅうたんに振動させて重力波になる。ただ、人間が動いても小さな重力波しか発生しない。

重力は他の力にくらべて、とても弱い。

中性子星のペア、ブラックホールのペア、中性子星とブラックホールのペア。

だからとてもとても重くて、とてもとても速く動くものが、観測できるような大きな重力波を発生させるんだ。

[http://phdcomics.com/comics/archive\\_print.php?comicid=1853](http://phdcomics.com/comics/archive_print.php?comicid=1853)

図 25: 重力波の説明。(http://phdcomics.com/)