教科書の例題・問題・章末問題の抜粋です.

第 0 章　準備

0.1　数，命題と論理

0.1.1　数の集合

0.1.2　命題と論理

0.1.3　有理数・無理数と実数の連続性

例題 0.1
$\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ.

0.2　基本関数とグラフ

0.2.1　関数とグラフ

0.2.2　1 次関数

0.2.3　分数関数

0.2.4　2 次関数

問題 0.2
2 次方程式の解の公式を導け.

0.2.5　2 次曲線

0.2.6　指数関数

0.2.7　対数関数

問題 0.3
60 億人ひとりひとりに 2 進数で番号付けをするとき，何桁用意すれば良いか．必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使って良い.

例題 0.4
コンピュータの処理能力は，1.5 年で 2 倍になるというムーアの経験則がある．この法則が永久に続くとすると，10 年後，20 年後にはおよそどの位の能力になるか，横軸を年数とするグラフで示せ．また，あるときから 1000 倍の能力になるまでに何年かかるか．$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい.

問題 0.5
厚さ 1mm の紙を n 回折り曲げると，2^n mm の厚さになる．以下では紙が何回でも折り曲げられるとしよう.

(1) 10 回折り曲げたときは約 何 m の厚さか.

(2) 20 回折り曲げたときは約 何 km の厚さか.

(3) 地球と太陽の距離（約 1 億 5000 万 km）に達するのは，何回目に折り曲げたときか.

必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使って良い.

0.2.8　三角関数

例題 0.6
弧度法を用いると，半径 r，角度 θ の扇型の面積 S は，$\dfrac{1}{2}r^2\theta$ になることを示せ.

例題 0.7
3 倍角の公式　$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$　を示せ.

問題 0.8
関数 $y = \cos 2\theta + 4\sin\theta + 7$　の最大値と最小値を求めよ.

例題 0.9
$\tan 1^\circ$ は無理数であることを示せ．ただし $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ が無理数であることを既知としてよい.

例題 0.10
$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，次式を示せ.

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

例題 0.11
同じ周期の 2 つの三角関数 $y = \sin x$ と $y = \sqrt{3}\cos x$ を重ね合わせた（足し合わせた）関数の最大値・最小値を求め，グラフを示せ．

問題 0.12
2 直線 $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$ のなす角のうち，鋭角の方を θ とすると，

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

であることを示せ．ただし, $m_1 \neq m_2$, $1+m_1 m_2 \neq 0$ とする．

0.2.9　逆三角関数

例題 0.13 次の値を求めよ．

1. $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　2. $\mathrm{Cos}^{-1}1$　3. $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

問題 0.14 次の値を求めよ．

1. $\mathrm{Sin}^{-1}0$　2. $\mathrm{Sin}^{-1}1$　3. $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)$
4. $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}$　5. $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　6. $\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3})$

問題 0.15 次の式をみたす x を求めよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{4}{5} = \mathrm{Cos}^{-1}x$

(2) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\,\mathrm{Tan}^{-1}x$

例題 0.16 $\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Cos}^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

問題 0.17 次の式を示せ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}x + \mathrm{Sin}^{-1}(-x) = 0$

(2) $\cos\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$

0.2.10　双曲線関数

0.2.11　逆双曲線関数

問題 0.18 次の式を示せ．

1. $\cosh^2 x = \dfrac{1+\cosh(2x)}{2}$
2. $\sinh^2 x = \dfrac{-1+\cosh(2x)}{2}$

問題 0.19 (0.2.77), (0.2.78) 式

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}x &= \log(x+\sqrt{x^2+1})\\ \cosh^{-1}x &= \pm\log(x+\sqrt{x^2-1})\quad (x \geq 1)\end{aligned}$$

を示せ．

0.3　ベクトル・行列

0.3.1　ベクトル

0.3.2　行列

0.4　二項係数

0.4.1　順列・組み合わせ

0.4.2　二項係数・二項定理

例題 0.20
n を大きくしていく場合の増加傾向について考えよ．

(1) 2^n と $n!$ はどちらが大きいか．

(2) 2^n と $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$（ただし $n \geq k$）は，どちらが大きいか．

(3) $n!$ と n^n は，どちらが大きいか．

第 0 章　章末問題

$\boxed{0.1}$ **（命題の真偽）**
次の命題の真偽を判定せよ．a, x, y は実数，n は自然数とする．

(1) すべての x に対して，$x^2 > x$ である．

(2) すべての $x > 0$ に対して，$y > x$ となる y が存在する．

(3) すべての $x > 0$ に対して，$y > \dfrac{1}{x}$ となる y が存在する．

(4) すべての $a \geq 0$ に対して，$\dfrac{1}{n} < a$ となる n が存在する．

(5) すべての $a > 0$ に対して，$\dfrac{1}{n} < a$ となる n が存在する．

$\boxed{0.2}$ **（黄金比）**人間が美しいと感じる図形の形は，ほぼ決まっていると言われる．長方形の辺の比に関しては，長方形の短辺を一辺とする正方形を切り取ったときに残される長方形の辺の比が，元の辺の比に等しい場合が，**黄金比**とされる．この比を求めよ．

$\boxed{0.3}$ **（合成関数）**

(1) $f(x) = \sqrt{25 - x}$, $g(x) = x^2$ とするとき，次の関数の定義域と値域はどこか．
(a) f　　(b) $f \circ g$　　(c) $g \circ f$

(2) $\sqrt{1 + \sin^2 x}$ を 4 つの合成関数 $f \circ g \circ h \circ k$ に分解せよ．

$\boxed{0.4}$ **（虚数単位）**
i を虚数単位とする．

(1) $x^2 = i$ を満たす数 x を $a + bi$ の形で求めよ．

(2) $\sqrt{3 + 4i}$ を $a + bi$ の形で求めよ．

$\boxed{0.5}$ **（放射性元素の崩壊）**
ある放射性物質は，一定の割合で崩壊しており，4 日後ごとに半分の量になることがわかっている．

(1) この放射性物質は，1 日後には元の量の何倍になるか．

(2) この放射性物質が，元の量の $\dfrac{1}{10}$ 倍になるのは何日後か．

必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を使って良い．

$\boxed{0.6}$ **（星の等級）**
星の明るさ（等級）は，1 等星と 6 等星の明るさの差を 100 倍として，等間隔でスケールした単位で決められる．また，0 等級よりも明るい天体の場合は負の数を用いる．

(1) 1 等星は，2 等星の何倍の明るさか．

(2) 地球で観測する恒星で，最も明るいのは太陽であり，明るさは -26.7 等級である．2 番目に明るい恒星は，おおいぬ座のシリウスであり -1.46 等級である．太陽はシリウスの何倍の明るさか．

(3) 観測する星の光は，届くまでの距離に応じて弱くなる．星を同じ距離（32.6 光年）に置いたと仮定して個々の星の明るさを比較するのが絶対等級である．太陽の絶対等級は $+4.83$ 等級，シリウスの絶対等級は $+1.45$ 等級である．星の明るさとして，シリウスは太陽の何倍か．

$\boxed{0.7}$ **（潮の満ち引き）**
潮の満ち引きを平均的な潮の水位で測ることにしよう．深夜 0 時に水位 4m の満潮，午前 6 時に水位 1m となる地点があり，その後 6 時間ごとにこの高さの干満を周期的に繰り返すとする．時刻 t における水位を計算する式を導き，午後 4 時 30 分にはどれだけの水位になっているかを求めよ．

$\boxed{0.8}$ **うなり**
周期の少しだけ異なる音が重なると「うなり」が聞こえる．いま，f_1[Hz]，f_2[Hz] の 2 つの音波が三角関数として，

$$y_1 = A\sin(2\pi f_1 t), \quad y_2 = A\sin(2\pi f_2 t)$$

で表されているとする．（音の大きさ（振幅）A は同じとした．）2 つの波を加えることでうなりになることを示せ．

$\boxed{0.9}$ あるガラスを通過すると光の強さは，$\dfrac{9}{10}$ 倍になる．光の強さを $\dfrac{1}{4}$ 以下にするためには，このガラス板を何枚重ねればよいか．必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 5 = 0.6990$ を使って良い．

$\boxed{0.10}$ **杭打ち**

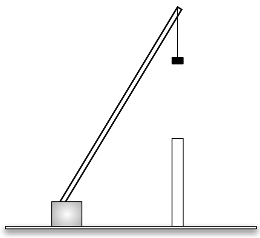
工事現場で見られる，地面に杭を打ち込む作業を簡単化したモデルを考えよう．ある高さから杭に向けて垂直におもりを落下させるとき，杭は，おもりが杭に接するまでの落下距離 $x(>0)$　の $a(>0)$ 倍の長さだけ，いつでも地面に打ち込まれるとする．おもりを毎回同じ高さまで釣り上げて，この作業を続けるとき，次の問いに答えよ．一度目の落下距離を x_1 とする．

(1) 2 回目の作業をする直前の落下距離 x_2 を a と x_1 を用いて示せ．

(2) n 回目の作業をする直前の落下距離 x_n を a と x_1 と n を用いて示せ．

(3) この作業を無限回繰り返しても，杭を完全に打ち込めない場合があり得るか．説明を付して答えよ．

(4) $a = \dfrac{1}{3}$ とするとき，作業開始時の杭の高さがおもりの釣り上げる高さの半分の場合，杭は完全に打ち込まれるまでに最低何回の作業が必要か．必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使って良い．



第 1 章　数列の極限，関数の連続性

1.1　数列，級数

1.1.1　数列

1.1.2　数列の部分和

1.2　数列の極限

1.2.1　極限の定義

例題 1.1 次の数列の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+n+1}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^n+2^n}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\cos\frac{n\pi}{2}$
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\sin\sqrt{n}\pi$
6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

問題 1.2 次の数列の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{1-n}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{-3n^2+16n}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

1.2.2　数列の極限に関する定理

問題 1.3 次の極限値を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$

1.2.3　無限級数

例題 1.4 次の無限級数の和を求めよ．

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{2^4}+\cdots$

(3) $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

問題 1.5 次の無限等比級数の和を求めよ．

1. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^{n+1}}$

例題 1.6 次の循環小数を分数で表せ．

1. $0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots$
2. $0.1\dot{2}\dot{3}=0.123232323\cdots$

問題 1.7 次の循環小数を分数で表せ．

1. $0.\dot{1}2\dot{3}=0.123123123\cdots$
2. $0.\dot{1}4285\dot{7}=0.14285714\cdots$

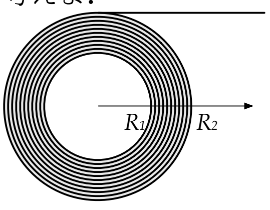
1.2.4　区分求積法

例題 1.8
連立不等式 $0\le x\le 1$，$0\le y\le x^2$ で表される領域の面積 S を区分求積法によって求めよ．

問題 1.9
連立不等式 $0\le x\le 1$，$0\le y\le x^3$ で表される領域の面積 S を区分求積法によって求めよ．

例題 1.10
連立不等式 $0\le x\le 1$，$0\le y\le x$ で表される領域を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V を区分求積法によって求めよ．

問題 1.11
紙テープが，半径 R_1 の芯にすき間なくしっかりと巻かれていて，最大の半径は R_2 である．紙テープの厚さは d とする．紙テープの長さ L を次の順で考えよ．

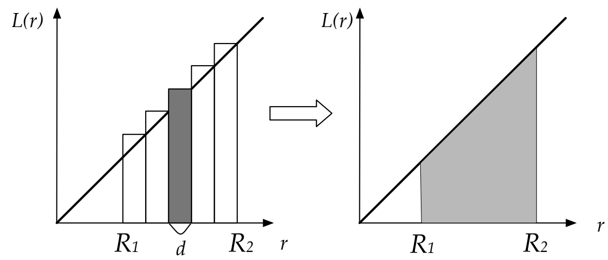


(1) 紙テープの巻き数 N を R_1, R_2, d を用いて表せ．

(2) 内側から k 周目（ただし，$k = 1, \cdots, N$）の円周の長さを R_1, d, k および円周率 π を用いて表せ．

(3) 全体の長さ L を上記の N 周分までの和として $\sum$ 記号を用いて示せ．

下図左は，半径を横軸にしてテープの厚さ d ごとに，その周の円周の長さを縦軸に表したものである．全体の長さ L と幅 d の積 Ld は，短冊状に描かれた部分の総和になるが，紙テープの厚さ d が非常に小さければ，総和の値は，下図右の塗りつぶされた部分の面積にほぼ等しくなる．



(4) 積 Ld の値 を積分の形で表せ．

(5) 全体の長さ L を R_1, R_2, d, π を用いて表せ．

1.3　関数の極限

1.3.1　関数の極限の定義

1.3.2　基本的な関数の極限

例題 1.12
$f(x) = x\cos(1/x),\ g(x) = |x|,\ h(x) = -|x|$ のグラフを描き，$\lim_{x\to 0} f(x)$ を求めよ．

例題 1.13 次の式を示せ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$　　2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a$

問題 1.14 次の式を示せ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$　　2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x} = a$

例題 1.15
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$ を示せ．

問題 1.16
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x$ を示せ．

例題 1.17

(1) $x > 0$ のとき，$e^x > \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

(2) 上記を利用して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ を導け．

例題 1.18

(1) $x > 0$ のとき，$\log x < \sqrt{x}$ が成立することを示せ．

(2) 上記を利用して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ を導け．

問題 1.19 Bernoulli の不等式

$h > 0$　ならば　$(1+h)^n > 1 + nh$　$(n = 2, 3, \cdots)$

を利用して，以下の問いに答えよ．

(1) a が正の定数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ が成立することを示せ．

(2) $h = 1/\sqrt{n}$ として，不等式

$$\sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

を示せ．

(3) 上記の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ を示せ．

1.3.3　e の定義

問題 1.20 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を既知として次式を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$　　2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$

1.3.4　連続関数の性質

第 1 章　章末問題

$\boxed{1.1}$ 2 項定理より，

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}x^k$$

と書けるが，この展開式の第 2 項・第 3 項・第 4 項の係数が等差数列となるとき，n はいくらか．ただし $n\geq 3$ とする．

$\boxed{1.2}$ （極限）
次の命題の真偽を判定せよ．偽の場合は反例を挙げよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ は存在しない．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$，$a_n<b_n$ ならば，$\alpha<\beta$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

$\boxed{1.3}$ 次の極限値を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$　　2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n}}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}$　　4. $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{x}\right)$　　6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$

7. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}$　　8. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$　　10. $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$

$\boxed{1.4}$ （住宅ローン問題）
ある年の初めに，年利 r の複利法で，A_0 円の借金をした．翌年から毎年初めに x 円づつ返済して，n 年で全額を返済したい．n を決めたときの x の値を次のようにして考えよう．
1 年後，2 年後の借入金の残額をそれぞれ A_1, A_2 とすると，各年ごとの借入金の残額に年利 r の利子がつくことから，

$$A_1=A_0(1+r)-x$$
$$A_2=A_1(1+r)-x$$

と表すことができる．

(1) 2 年後，年後の借入金の残額 A_2, A_3 を A_0,r,x を用いて表せ．

(2) n 年後の借入金の残額 A_n を A_0,r,x を用いて表せ．

(3) n 年後の借入金の残額がゼロとなるための，x を求めよ．

$\boxed{1.5}$ 次の無限等比級数の収束・発散を調べ，収束するものは和を求めよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}+\cdots$

(3) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

(4) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$

第 2 章　微分法

2.1　微分の定義と意味

2.1.1　微小量の変化

2.1.2　微分係数・導関数

例題 2.1　— $y = x(x-1)(x+1)$ の極値を与える x を求めよ．

例題 2.2
$y = -x^5 + 2x^3$ のグラフを描け．

2.1.3　「微分」の意味

2.2　微分の計算方法

2.2.1　基本関数の導関数

例題 2.3
導関数の定義に従って，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を示せ．

問題 2.4
導関数の定義に従って，次の微分を示せ．

1. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

例題 2.5
原点を通り，$(a, 2a^2)$ を頂点とする，上に凸の放物線（2 次曲線）と x 軸で囲まれる領域において，最大の面積を持つ長方形の面積 S を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

例題 2.6
球形の風船の半径が一定の速さで増加しているとき，その体積増加率は，そのときの表面積に比例することを示せ．

例題 2.7
スキーのジャンプ台に似せた曲線を関数

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2\,x^2$$

の $-3 \leq x \leq 0$ の部分で表すことにする．

(1) このとき，曲線の接線が x 軸に平行な点 2 つをそれぞれジャンプ点・終点とする．ジャンプ点の座標を求めよ．

(2) ジャンプ台の建築基準点は K 点（ドイツ語で Konstruktions Punkt）と呼ばれ，曲線の変曲点に相当する点である．この曲線の K 点の座標を求めよ．

問題 2.8
3 次関数 $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が極大値と極小値を持ち，その差が 4 であるとき，a, b の関係式を求めよ．

2.2.2　基本演算公式

例題 2.9　微分せよ．

1. $y = x + 3x^2 + \dfrac{1}{x}$
2. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $y = \sin x \cos x$
4. $y = x \log x - x$
5. $y = e^x \log x$
6. $y = \dfrac{1}{\log x}$

問題 2.10　微分せよ．

1. $x^n e^x$
2. $(x+1)\sqrt{x}$
3. $e^x(\sin x + \cos x)$
4. $\sin^2 x$
5. $\dfrac{1}{x^2+1}$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
7. $\dfrac{1}{\tan x}$
8. $\dfrac{\sin x}{x}$
9. $\dfrac{\log x}{x}$

例題 2.11　2 階導関数を求めよ．

1. $y = e^x \sin x$
2. $y = x^n \log x$

2.2.3　合成関数の微分

例題 **2.12**　微分せよ．

1. $y = (3x+5)^8$
2. $y = e^{2x+3}$
3. $y = \sin(2x+3)$
4. $y = (\log x)^2$
5. $y = \sin x^3$
6. $y = \sin^3 x$
7. $y = \tan(1+x^2)$
8. $y = \log(\log x)$
9. $y = \sqrt{1-x^2}$
10. $y = \log\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

問題 **2.13**　微分せよ．

1. $(2x^2+3)^5$
2. $e^{\cos x}$
3. $\log 3x$
4. $\sin x^2$
5. $\sin(\cos x)$
6. $\sin(\log x)$
7. e^{-2x^3}
8. $\log\sqrt{\cos x}$
9. $\log(x^2+1)$
10. $(2x^2+3)^2(3x+1)^3$
11. $\sin^3 x\cos x$
12. $e^{-x}\cos x$
13. $\sqrt{1+\sin^2 x}$
14. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
15. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$
16. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$
17. $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

2.2.4　逆関数の微分

2.2.5　対数微分法

例題 **2.14**　微分せよ．

1. $\mathrm{Sin}^{-1}x$
2. $\sinh^{-1}x$
3. x^x

2.3　微分の応用

2.3.1　グラフを描く手順

例題 **2.15**　$y = e^{-x^2}$ のグラフを描け．

例題 **2.16**
増減，極値，凹凸，変曲点を調べ，曲線 $y = (\log x)^2$ の概形を描け．さらに，変曲点における接線を図に書き込め．

問題 **2.17** 次の関数のグラフを描け．

1. $y = xe^{-x}$
2. $y = xe^{-x^2}$
3. $y = x^2e^{-x}$
4. $y = \log(x^2+1)$
5. $y = \sinh x$
6. $y = \cosh x$

問題 **2.18** 次の関数の与えられた点における接線と法線の式を求めよ．

1. $y = \sin 2x \quad (x=0)$
2. $y = \sin 2x \quad (x=\pi/3)$
3. $y = (1+\cos x)\sin x \quad (x=\pi/3)$

2.3.2　最大最小問題，不等式の証明

例題 **2.19**
細長い長方形のトタン板があり，一辺を 3 等分して折り曲げて雨どいを作る．折り曲げる角度を θ とすると，断面積を最大にする θ はいくつか．

例題 **2.20**
海水浴の監視員が浜辺から a の距離にいる．彼が，自分から見て右に b, 浜辺から c の距離におぼれている人を発見した．最短時間で救助するためには，どのような経路で向かえばよいか．ただし，彼が砂浜を走る速さは，泳ぐ速さの 4 倍である．

例題 2.21
円柱形の缶ジュースいっぱいに中身が入っているとき，全体の重心は缶の中央の高さになっている．中身を飲んでいくと重心は下に下がるが，すべてを飲み干したときは重心は再び缶の中央になる．つまり，どこかで最小値があるはずである．
缶自体の重さを M，ジュースがいっぱいになっているときの重さを m，全体の高さを 1 としたとき，重心の位置を残されたジュースの高さ x $(0 \leq x \leq 1)$ の関数として求め，そのときの重心の最小値がジュースの高さと一致することを示せ．

問題 2.22
正方形の四隅から等しい正方形を切り取り，残りでなるべく大きな（ふたのない）箱を作りたい．切り取るべき正方形の 1 辺の長さを求めよ．

問題 2.23
天井を支える材木の強度は，「断面の幅 × 断面の高さ ^{2}」に比例する．直径が 10 cm の丸太から最強の材木を切り出すとき，幅 x と高さ h をどのように決めたら良いか．

問題 2.24
円柱状の缶詰を作る材料費を安く済ませるためには，できるだけ小さな表面積（上下の面も含む）にすればよい．体積を一定とするとき，缶の底面の半径と高さの比は，どれだけにすれば良いか．

問題 2.25
周囲の長さが与えられた扇形の面積を最大にする角度は何度か．

例題 2.26
$x > 0$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

問題 2.27
$x > 0$ のとき，次式が成立することを示せ．

(1) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

(2) $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

(3) $e^x > 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \dfrac{x^n}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

例題 2.28

(1) 上に凸な関数 $y = f(x)$ を考え，異なる 3 点 x_1, x_2, x_3 に対応する $f(x)$ 上の点を結ぶ三角形を考えるとき，

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

（等号成立は $x_1 = x_2 = x_3$ のとき）となることを示せ．

(2) $f(x) = \log x$ として上記の公式を適用し，$x > 0$ に対して，

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

（等号成立は $x_1 = x_2 = x_3$ のとき）となることを示せ．

2.3.3　平均値の定理

2.3.4　不定形の極限

例題 2.29
ロピタルの定理を用いて，次の極限値を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x - 1}$　2. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^3}{x}$　3. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

問題 2.30
ロピタルの定理を用いて，次の極限値を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^x$

2.4　高階導関数

2.4.1　高階導関数の定義

例題 2.31
次の関数の n 次導関数を求めよ．

1. $y = e^{3x}$　　2. $y = \log x$

例題 2.32
$n \geq 3$ のとき，$y = (x^2 - x)\sin x$ の n 次導関数を求めよ．

問題 2.33
n 次導関数を求めよ．

1. $y = \cos 2x$　　2. $y = \log(1 - x)$
3. $y = x^3 \cos x$　　4. $y = x^{n-1} \log x$

2.4.2　Newton の近似法

2.5　Taylor 展開，Maclaurin 展開

2.5.1　Taylor の定理

2.5.2　Taylor 展開，Maclaurin 展開

例題 2.34
$e^x \sin x$ の Maclaurin 展開を 3 次まで求めよ．

問題 2.35
次の関数の Maclaurin 展開を 3 次まで求めよ．

1. e^{3x}　　2. $\sin \dfrac{x}{2}$　　3. $(1 + x)^{1/3}$

例題 2.36
次の値を有効数字 3 桁まで求めよ．

1. $\cos 31^\circ$　　2. $\sqrt[3]{30}$

例題 2.37
経済学では，毎年 x% の経済成長が続くとき，元の 2 倍になるまでの年数 N は，およそ $N \simeq 70/x$ で求められるというマジックナンバー 70 がある．この式を示せ．$\log 2 = 0.6931$ を用いてよい．

問題 2.38
地球を半径 R の完全な球だとする．高さ h の視点から地平線を見たとき，どの位の距離まで見渡せるだろうか．一般的な式を導いた後で，$R \gg h$ の近似を行い，$R = 6380\mathrm{km}$ として，$h = 1.7\mathrm{m}$（人の高さ），100m（ビルの高さ），333m（東京タワー），3776m（富士山）のそれぞれについて見渡せる範囲を計算せよ．

2.6　Euler の公式

例題 2.39
複素平面と de Moivre の公式を用いて，次を求めよ．

1. $x^3 = 1$ の解．　　2. $\sqrt{i}$

第 2 章　章末問題

$\boxed{2.1}$ 微分せよ．

1. $6 + 5x^4 + \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}$
2. $e^x + \log x + 2\cos x + \tan x$
3. $x^3 \log x$　　4. $\dfrac{2z - 3}{2z + 1}$
5. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$　　6. $(2x + 3)^{-4}$
7. $\cos^3 4x$　　8. $\dfrac{\sin x}{x}$
9. $(\sin t + \cos t)^3$　　10. $t\sqrt{t^2 - 1}$
11. $(7x^2 + 3x - 5)^{-3/2}$　　12. $\log(\sqrt{x^2 - 1} - x)$
13. x^{x^2} $(x > 1)$　　14. $x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

$\boxed{2.2}$
次の関数の極値を求めよ．

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x^4 - 2x^2$
3. $f(x) = e^{-x} \cos x$

$\boxed{2.3}$
10 階微分 $y^{(10)}$ を求めよ．

1. $y = x^{20} + x^{10}$　　2. $y = \sin x + \cos x$

3. $y = \sin 2x$　　4. $y = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2.4}$ 次の関数のグラフの概形を描け．

(1) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

(2) $f(x) = (1 + \cos x)\sin x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$

$\boxed{2.5}$ 次の関数の Maclaurin 展開を求めよ．

(1) $f(x) = \sinh x$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$

$\boxed{2.6}$

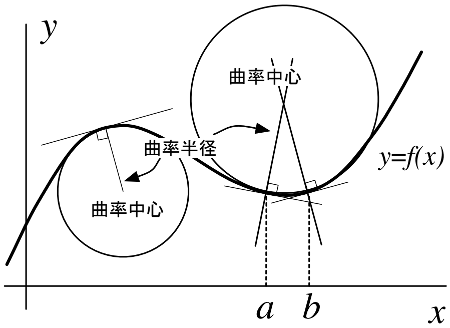
1 次までの近似，2 次までの近似を行って次の値を求め，電卓を用いて精度を確認せよ．

(1) $\sqrt{401}$　　(2) $\sqrt{35.9}$　　(3) $\sqrt[3]{26.91}$

$\boxed{2.7}$ （船の経済的な速度）

船を運航するときに要する燃料は，水面に対する速さの 3 乗に比例するという．いま，流速 c の川を流れにさからって距離 L だけ運航するとき，もっとも経済的な船の水面に対する速さを求めよ．

$\boxed{2.8}$ （曲率半径，曲率中心）



曲線をある点付近で円として近似するとき，その円の中心を**曲率中心**，半径を**曲率半径**という．これらを一般的に求めよう．

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ での曲線の法線の式を求め，その交点の座標を (X, Y) とする．X を求めよ．

(2) 2 点を近づけたとき，(X, Y) は曲率中心になる．$b \to a$ として，曲率中心を求めよ．

(3) $x = a$ 付近の曲率半径 R が次式で与えられることを示せ．

$$R = \frac{\sqrt{1 + (f'(a))^2}^3}{|f''(a)|}$$

第 3 章　積分法

3.1　積分の定義

3.1.1　原始関数

3.1.2　定積分

3.2　積分の計算法

3.2.1　基本関数の積分

例題 3.1 積分せよ．

1. $\displaystyle\int (x+3)^7\,dx$　2. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int (3x+4)^5\,dx$　4. $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

5. $\displaystyle\int a^x\,dx$　6. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

問題 3.2 積分せよ．

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$　2. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+4}$　3. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx$

4. $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$　5. $\displaystyle\int \sqrt{x+1}\,dx$　6. $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx$

例題 3.3
$y=\sin x$ の曲線と x 軸とが囲む部分について，

(1) $x=[0,\pi]$ の範囲で面積を求めよ．

(2) $x=[0,2\pi]$ の範囲で面積を求めよ．

3.2.2　積分の計算方法（１）基本的なテクニック

例題 3.4 積分せよ．

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$　2. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$　4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

5. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$　6. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$

問題 3.5 積分せよ．

1. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx$　2. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$　4. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$　6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

置換積分

例題 3.6
不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ を次の置換を用いて求めよ．

1. $t=1+x$　2. $u=\sqrt{1+x}$

定積分 $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$ を次の置換を用いて求めよ．

3. $t=1+x$　4. $u=\sqrt{1+x}$

問題 3.7
積分せよ．括弧内は置換のヒントである．ノーヒントもある．

1. $\displaystyle\int x(x^2+1)^6\,dx$　$(t=x^2+1)$
2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$　$(t=\log x)$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$　$(t=e^x)$
6. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$　$(x=\tan\theta)$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$　$(x=\tan\theta)$

部分積分

例題 3.8 積分せよ．

1. $\displaystyle\int x\log x\,dx$　　2. $\displaystyle\int(\log x)^2\,dx$
3. $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$　　4. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

問題 3.9 積分せよ．(2) では，$n\neq -1$ とする．

1. $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$　　2. $\displaystyle\int x^n\log x\,dx$
3. $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　　4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$
5. $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$　　6. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

3.2.3　積分の計算方法（２）進んだテクニック

例題 3.10
次の公式を求めよ．n, m は自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx = \begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx = \begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\cos nx\,dx = 0$$

例題 3.11
$\displaystyle\int\sin^2 x\,dx,\ \int\cos^2 x\,dx,\ \int\sin^3 x\,dx,\ \int\cos^3 x\,dx.$

例題 3.12

(1) $I_n=\displaystyle\int\sin^n x\,dx$ に対して，

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

を示せ．

(2) $I_4=\displaystyle\int\sin^4 x\,dx$ を求めよ．

例題 3.13 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を次の 2 つの方法で積分せよ．

(1) $u=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換．

(2) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$ として，$t=\cos x$ と置換．

問題 3.14
$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ を上記の例題と同じ 2 つの方法で積分せよ．

例題 3.15 積分せよ．

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　　2. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

問題 3.16 積分せよ．

1. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$　　2. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

3.3　広義積分

3.3.1　第 1 種広義積分

例題 3.17 $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$ を求めよ．

問題 3.18
定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ の値を α の値で場合分けして示せ．

3.3.2　第 2 種広義積分

例題 3.19
万有引力の法則によれば，距離 r だけ離れた 2 つの質量 M, m の間には，$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$ の引力が働く．G は万有引力定数である．
無限遠の場所から 2 つの物体を距離 R までに近づけたとき，万有引力がした仕事（「仕事」は「力」×「移動した距離」で定義される）を位置エネルギー（ポテンシャル）と呼ぶ．位置エネルギーを求めよ．

問題 3.20 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$ を示せ．

3.4　積分の応用

3.4.1　面積・体積

例題 3.21
半径 r の円の面積 S を求めよ．

例題 3.22
正三角錐の体積を求めよ．

例題 3.23
底面の面積が S_0, 高さが H の錐体の体積 V を求めよ．

3.4.2　曲線の長さ

例題 3.24
鎖などが自分自身の重さによって垂れ下がってできる曲線を懸垂線 (catenary) といい，

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で表される．この懸垂線の $-1 \le x \le 1$ の部分の長さ L を求めよ．

例題 3.25
半径 r の円の円周の長さ L が $L = 2\pi r$ となることを確かめよ．

例題 3.26
放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$,　$0 \le x \le 1$ の長さを求めよ．

3.4.3　回転体の体積・表面積

例題 3.27
球の体積と表面積を求めよ．

例題 3.28
ドーナツの体積と表面積を求めよ．ただし，ドーナツの断面は半径 r の円であり，ドーナツの中心は半径 R $(R > r)$ の円であるとする．

第 3 章　章末問題

$\boxed{3.1}$ 積分せよ．

1. $6 + 5x^4 + \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}$
2. $e^x + \log x + 2\cos x + \tan x$
3. $(2x+3)^{-4}$
4. xe^{x^2}
5. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $x^3 \log x$
8. $\dfrac{\log x}{x}$
9. $\dfrac{2z-3}{2z+1}$
10. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
11. $\dfrac{1}{\tan x}$
12. $\dfrac{1}{x^2 - 9}$

$\boxed{3.2}$ 次の積分値を求めよ．

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x})\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$

$\boxed{3.3}$
物体の運動方向を x 軸として，時刻 t での位置を $x(t)$ として表す．時刻 $t = 0$ での物体の位置 $x(t=0)$ と速度 $v(t=0)$，その後に物体にはたらく加速度 $a(t)$ が次のように与えられるとき，$x(t)$ を求めよ．ただし，位置 $x(t)$，速度 $v(t)$，加速度 $a(t)$ の間には，

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

の関係がある．

(1) $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, $a(t) = -g$. (g は定数)

(2) $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, $a(t) = -g$. (x_0, v_0, g は定数)

(3) $x(0) = R$, $v(0) = 0$, $a(t) = R\omega^2 \sin \omega t$. $(R, \omega$ は定数)

$\boxed{3.4}$ **（積分の平均値の定理）**
区間 $[a, b]$ における連続な関数 $f(x)$ に対し，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c), \qquad (a < c < b) \quad (3.4.1)$$

を満たす点 $x = c$ が存在する（積分に対する平均値の定理）．次の関数の指定された区間に対して，平均値 $f(c)$ を求めよ．

(1) $f(x) = x^3$, $\quad [0, 1]$

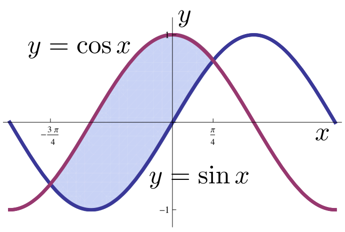
(2) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad [0, 4]$

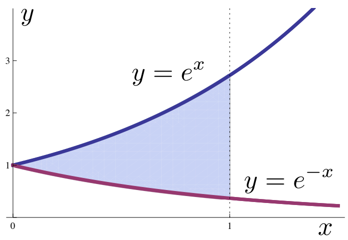
(3) $f(x) = A\sin^2 x$, $\quad [0, 2\pi]$ (A は定数)

$\boxed{3.5}$ 次の図形の面積を求めよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ が，$x = [-3\pi/4, \pi/4]$ の区間で囲む図形．

(2) 曲線 $y = e^x$ と $y = e^{-x}$ と $x = 1$ が囲む図形．





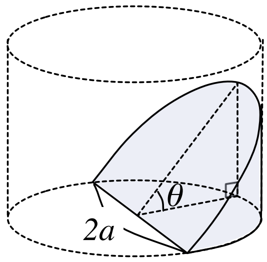
$\boxed{3.6}$
$0 \le x \le 1$ の区間で，直線 $y = x$ の面積 $(0 \le y \le x)$ を 2 等分する曲線として，$y = x^n$ $(n:$ 定数) を考えると，n はいくつにすればよいか．

$\boxed{3.7}$
$f(x) = e^{-x}\sin x$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $I = \int f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$I_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．ただし，n は 0 または正の整数とする．

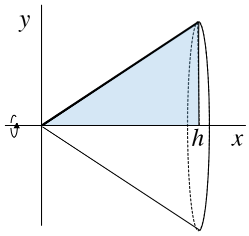
$\boxed{3.8}$
図のように，底面の半径 a の円柱を，底円の中心を通る角度 θ の面で切り取ったとき，切り取った面より下にある部分の体積を求めよ．



$\boxed{3.9}$
直線 $y = mx$, $0 \le x \le h$ を x 軸のまわりに回転させると高さ h の直円錐になる．

(1) この直円錐の体積を求めよ．

(2) この直円錐の表面積を求めよ．



$\boxed{3.10}$ 積分せよ．(4) は，$x = \sinh t$ ，あるいは $x + \sqrt{x^2+1} = u$ と置換．

1. $(\log x)^2$
2. $\log(x + \sqrt{x^2+1})$
3. $\sin(\log x)$
4. $\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{3.11}$
次の広義積分を計算せよ．k は正の定数とする．

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-kx}\,dx$

$\boxed{3.12}$
n を自然数として，$S_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とする．

(1) $y = \dfrac{1}{x}$ の曲線の $1 \leq x \leq n+1$ の部分の面積と，S_n を比較することにより，S_n が $n \to \infty$ の極限で無限大に発散することを示せ．

(2) $S_n - \log n$ が収束することを示せ．

$S_n - \log n$ は **Euler の定数**と呼ばれ，$0.5772156\cdots$ である．この数が無理数なのかどうかはわかっていない．

$\boxed{3.13}$
$y = \dfrac{1}{x^2}$ の曲線のグラフを考えることにより，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

が収束することを示せ．
$f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$ を**ゼータ関数**と呼ぶ．$x > 1$ のとき $f(x)$ は収束，$x \leq 1$ のとき $+\infty$ に発散する．

$\boxed{3.14}$ **（Cauchy-Schwarz の不等式）**
恒等的にゼロではない連続関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，任意の x, t に対して

$$\{tf(x) - g(x)\}^2 \geq 0 \cdots\cdots (*)$$

が成立することを用いて，Cauchy-Schwarz の不等式

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \geq \left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

が成立することを示せ．また，これを利用して

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{x\sin x}\,dx \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

を示せ．

$\boxed{3.15}$ **（漸化式を用いた積分公式の導出）**
m, n を自然数とする．部分積分によって漸化式を導くことにより，

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \quad (3.4.2)$$

を示せ．

$\boxed{3.16}$
m, n を 0 以上の整数とする．部分積分によって漸化式を導け．

(1) $I_n = \displaystyle\int x^n e^x\,dx$

(2) $I_{m,n} = \displaystyle\int x^m(\log x)^n\,dx$

$\boxed{3.17}$
$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とする．

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(2) $I_n \geq I_{n+2}$ を示せ．

(3) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = I_0-(-1)^n I_{2n}$ を示せ．

(4) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(4) の等式は，**Leibniz の級数**と呼ばれる．

$\boxed{3.18}$
地球を完全な球と考えたとき，北半球の表面積をちょうど 2 等分する緯度は何度か．

$\boxed{3.19}$
楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ の内部の体積を求めよ．
（ヒント：z 一定面での断面は，楕円になる．また，$a = b = c$ のときは球．）

第 4 章　曲線のパラメータ表示

4.1　パラメータ表示

4.1.1　直線のパラメータ表示

4.1.2　円・楕円・双曲線のパラメータ表示

4.1.3　平面のパラメータ表示

例題 4.1 （斜方投射の問題）時刻 $t = 0$ で，角度 θ の方向に，初速度 V_0 で投げ出されたボールの軌道を論じよ．ただし，ボールは水平方向には等速運動（すなわち加速度ゼロ）を行い，鉛直方向には下向きに加速度 g で運動する．

問題 4.2 上の問題で，ボールの軌道の最高点の座標，および再び落下する地点までの距離を求めよ．また，ボールを最も遠くへ飛ばすには θ をいくつにすればよいか．

4.2　有名な曲線

4.2.1　減衰曲線・対数らせん

4.2.2　サイクロイド

4.2.3　アステロイド・星芒線

4.2.4　インボリュート・伸開線

4.2.5　カージオイド・心臓形

4.2.6　極座標表示された曲線

4.2.7　リサジュー図形

4.3　パラメータ表示された曲線の微分・積分

4.3.1　微分

例題 4.3　パラメータ表示された関数

$$x(t) = 3\sin t, \quad y(t) = 2\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

について，$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

例題 4.4 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $(1, \sqrt{3})$ における接線の傾き．

例題 4.5 アステロイド曲線

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$

の各点 $(\theta \ne \dfrac{n\pi}{2})$ における接線が，両軸によって切り取られる長さは一定であることを示せ．

4.3.2　積分と応用

$\boxed{\text{面積}}$

例題 4.6
楕円 $\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \sin t \end{cases}$ $(a, b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi)$ の面積．

問題 4.7
サイクロイド $\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \sin\theta), \\ y(\theta) = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の面積．

$\boxed{\text{体積}}$

例題 4.8
楕円 $\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \sin t \end{cases}$ $(a, b > 0,\ 0 \le t \le \pi)$ の $y \ge 0$ の部分を x 軸を中心に回転させてできる立体の体積．

$\boxed{\text{曲線の長さ}}$

例題 4.9
サイクロイド $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の長さ．

問題 4.10
アステロイド $\begin{cases} x(\theta) = a\cos^3\theta, \\ y(\theta) = a\sin^3\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ の長さ．

例題 4.11
極方程式 $r = f(\theta), (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ が表す曲線 C について，次の式を示せ．

(1) 曲線 C 上の点と原点を結んだ直線が通過する部分の面積 S:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 \, d\theta \tag{4.3.1}$$

(2) 曲線 C の長さ L:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} \, d\theta \tag{4.3.2}$$

問題 4.12　例題 4.11 の結果を用いて次を求めよ．

(1) カージオイド $r = a(1 + \cos\theta), (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ が囲む面積．

(2) カージオイド $r = a(1 + \cos\theta), (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さ．

第 4 章　章末問題

$\boxed{4.1}$
関数 $y(x)$ が，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta, \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

として表されているサイクロイドについて次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t を用いて表せ．

(2) サイクロイドと x 軸が囲む部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．必要であれば，$\displaystyle\int \sin^n x \, dx$ に対する次の漸化式を用いて良い．

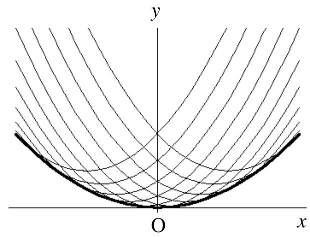
$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad I_0 = \pi$$

$\boxed{4.2}$

(1) 極方程式 $r = \cos\theta$ で表される曲線は円であることを示せ．

(2) 極方程式 $r = \sin\theta$ で表される曲線は何か．

$\boxed{4.3}$
曲線 $f(x, y, t) = 0$ が，パラメータ t に対して連続的に変化するとき，**曲線群**という．すべての曲線に接する曲線を，この曲線群の**包絡線**という．



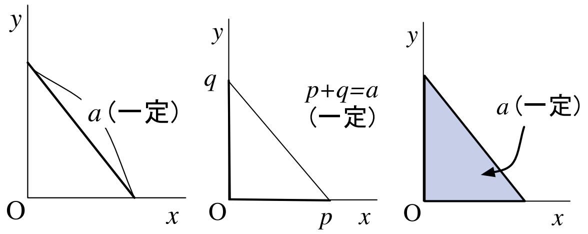
包絡線は，$f(x, y, t) = 0$ と $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ を連立させて t を消去することで得られる．次の包絡線を求めよ．

(1) t をパラメータとする曲線群 $y = (x - t)^2 + t^2 = 0$ の包絡線．

(2) 座標軸によって切り取られる線分の長さが a であるような直線群 $y = -\dfrac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} x + t$ $(-a \leq t \leq a)$ の包絡線．

(3) 線分の両軸との切片の座標の和が一定値 a であるような直線群 $y = \left(1 - \dfrac{t}{a}\right) x + a - t$ $(0 \leq t \leq a)$ の包絡線．

(4) 線分と両軸が囲む面積が一定値 a であるような直線群 $y = -\dfrac{t^2}{2m} x + t$ の包絡線．



第 5 章　偏微分と重積分

5.1　多変数関数

5.1.1　多変数関数

例題 5.1 次の関数 $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

問題 5.2

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ の極限を求めよ．

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ の極限値を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と変数変換して求めよ．

3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ は原点で連続か．

4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ は原点で連続か．

5.2　偏微分

5.2.1　偏微分の定義

例題 5.3 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

1. $x^4-10x^3y^2+5xy^4$
2. $e^{ax}(\cos by+\sin by)$
3. $\log(x^2+y^2)$

問題 5.4 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

1. $(x^2-3y)^4$　2. $\dfrac{x-y}{x+y}$　3. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$
4. $e^{-(x^2+y^2)}$　5. $\log\sqrt{x^2+y^2}$
6. $\sqrt{4-(x^2+y^2)}$

例題 5.5
次の関数の $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ が等しいかどうか確かめよ．

1. $z=\dfrac{x}{x+y}$　2. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

問題 5.6
例題 5.3 の関数の 2 階偏導関数をすべて求めよ．

問題 5.7
次の関数の点 (2,1) での第 2 次偏微分係数 $f_{xx}(2,1)$, $f_{xy}(2,1)$, $f_{yy}(2,1)$ を求めよ．

1. $f(x,y)=x^3+y^2+x^3y^2$
2. $f(x,y)=e^{x-y}\cos(\pi x)$

5.2.2　偏微分の意味

接平面

問題 5.8
関数 $f(x,y)=x^2-2xy+3y^2+4$ の次の点における接平面の式を求めよ．

1. $(x,y)=(0,0)$
2. $(x,y)=(1,1)$
3. $(x,y)=(1,0)$

全微分

例題 5.9 関数 $z(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ の全微分を求めよ．

5.2.3　合成関数の偏微分法：連鎖律

例題 5.10 指示された新しい変数での微分を求めよ．

(1) $z = x^2 - y^2$ に対して，$x = 2\cos\theta,\ y = 3\sin\theta$

(2) $z = \sin(x-y)$ に対して，$x = u^2+v^2,\ y = 2uv$

例題 5.11
c を定数として，方程式　$c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　がある．変数変換 $u = x + cy,\ v = x - cy$ を行うと，この式はどのように変換されるか．

問題 5.12 次の合成関数に対して，$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．

(1) $z = \log\sqrt{x^2+y^2},\ x = u\sin v,\ y = v\sin u$

(2) $z = e^{xy}$，$x = u^2+v^2,\ y = 2uv$

5.2.4　物理数学に登場する偏微分

問題 5.13 次の関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を求めよ．

1. $f(x,y) = e^{2x+3y}$
2. $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題 5.14 理想気体の状態方程式

$$PV = nRT$$

に，さらに分子の大きさと分子間力を仮定した方程式として，van der Waals 方程式

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = nRT$$

がある．a, b は正の定数である．いま，気体の温度 T が時間 t の関数としてこの方程式に従う場合，$\dfrac{dT}{dt}$ を $\dfrac{dP}{dt}, \dfrac{dV}{dt}$ および P, V を用いて表せ．

5.2.5　極座標変換 (r,θ)

例題 5.15
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，次の全微分の対応関係を示せ．

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

例題 5.16
直交座標 (x,y)，極座標 (r,θ) で表現された関数 $z = f(x,y) = \tilde{f}(r,\theta)$ について，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

例題 5.17
直交座標 (x,y)，極座標 (r,θ) で表現された関数 $z = f(x,y) = \tilde{f}(r,\theta)$ について，次の関係式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

5.2.6　球座標変換 (r,θ,φ)

例題 5.18 極座標変換に対して次の全微分の対応を示せ．

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

例題 5.19
直交座標 (x,y,z)，極座標 (r,θ,φ) で表現された関数 $u = f(x,y,z) = \tilde{f}(r,\theta,\varphi)$ について，次の関係式を示せ．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\ = \;&\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2\end{aligned}$$

例題 5.20
直交座標 (x,y,z)，極座標 (r,θ,φ) で表現された関数 $u = f(x,y,z) = \tilde{f}(r,\theta,\varphi)$ に対して

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

とするとき，次の関係式を示せ．

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

5.3 偏微分の応用

5.3.1 2 変数関数の Taylor 展開

5.3.2 2 変数関数の極値

問題 5.21 次の関数 $f(x,y)$ のヘシアン $H(x,y)$ を求めよ．また，$H(0,0)$ はいくらか．

1. x^2+y^2　2. $\sin x\cos y$　3. $e^x\sin y$
4. $e^{x^2+y^2}$　5. $e^{-x^2-y^2}$　6. $\sqrt{x^2+y^2}$

例題 5.22
関数 $f(x,y)=x^3-3axy+y^3$ の極値を求めよ．

問題 5.23
$f(x,y)=3x^3+y^2-9x+4y$ の極値を求めよ．

問題 5.24
曲面 $z^2=x^2y+4$ と原点との最小距離を求めよ．

問題 5.25 （温度分布のある円盤）
半径 1 の円盤（$x^2+y^2\le 1$）の板の温度分布が $T(x,y)=2x^2+y^2-y+1$ で与えられるとき，この板の温度の最高値と最低値，およびそれらを与える点を求めよ．

5.3.3 陰関数の定理

例題 5.26 $5x^2+5y^2+6xy-8=0$ をみたす (x,y) 平面上の曲線の極大値と極小値を求めよ．

例題 5.27 (x,y) が，$x^3+x^2y-10y^4=0$ をみたすとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

例題 5.28 $x^3+y^3-3xy=0$ をみたす (x,y) 平面上の曲線の極大値と極小値を求めよ．

5.3.4 Lagrange の未定乗数法

例題 5.29
$x^2+y^2=1$ のもとで，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

例題 5.30
体積が一定の直方体の中で，表面積が最小となるものを求めよ．（最小値が存在するとしてよい）．

問題 5.31
$x^4+y^4=1$ のもとで，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．

5.4 重積分

5.4.1 重積分の定義と計算

例題 5.32 次の 2 重積分を求めよ

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy,$
$D=\{\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\text{ の長方形 }\}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy,$
$D=\{\,x=0,\ x=1,\ y=x$ と x 軸とで囲まれる領域 $\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dx\,dy,\quad D=\{\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$

例題 5.33 次の 3 重積分を求めよ．

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz,$$
$$D=\{\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$$

問題 5.34 次の 2 重積分・3 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy,$
$D=\{0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^3\,dx\,dy,$
$D=\{0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+2y)\,dx\,dy,$
$D=\{\,y=x^2$ と $y=\sqrt{x}$ とで囲まれる領域$\}$

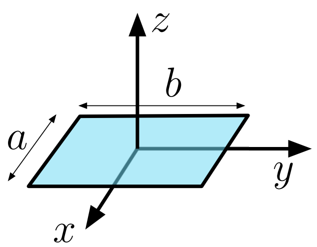
(4) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,$
$D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le y\}$

5.4.2　重心・慣性モーメント

例題 5.35
密度が一様で厚さが一定な，半径 R，角度 90 度の扇 $D: x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ がある．これを xy 面で「皿回し」するとき，どこに棒をさせばよいか．

例題 5.36
半径 a，質量 M の薄い円盤 $D: x^2+y^2 \leq a^2$ の x 軸，y 軸，z 軸に関する慣性モーメント I_x, I_y, I_z を求めよ．

問題 5.37
辺の長さが a, b で質量が M の長方形の板の中点を原点にして，右図のように x, y, z 軸をとる．各軸に関する慣性モーメント I_x, I_y, I_z を求めよ．



5.4.3　重積分の変数変換

例題 5.38
極座標変換のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

問題 5.39
球座標変換のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ．

例題 5.40
極座標表示の重積分により，円の面積を求めよ．

例題 5.41
球座標表示の重積分により，球の体積を求めよ．

問題 5.42
極座標変換あるいは球座標変換を行って次の積分を求めよ．

(1) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy,$
$D = \{(x,y) | 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

(2) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$
$D = \{(x,y,z) | 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$

5.4.4　Gauss 積分

5.5　積分で定義される関数

5.5.1　誤差関数

5.5.2　ガンマ関数

5.5.3　ベータ関数

5.5.4　n 次元空間での球

第 5 章　章末問題

$\boxed{5.1}$
$\Delta_2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, および $\Delta_3 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ とする．次の値を求めよ．

1. $\Delta_2 \sqrt{x^2+y^2}$
2. $\Delta_2 \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x}$
3. $\Delta_3 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
4. $\Delta_3 \log(x^2+y^2+z^2)$

$\boxed{5.2}$ **Cauchy-Riemann の方程式**
2 階微分可能な関数 $f(x,y), g(x,y)$ が

$$f_x = g_y, \qquad g_x = -f_y$$

を満たすとき，$\Delta_2 f = 0$, $\Delta_2 g = 0$ となることを示せ．(Δ_2 の定義は，$\boxed{5.1}$参照)

$\boxed{5.3}$
$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, y = X\sin\theta + Y\cos\theta$ のとき，$z = f(x,y)$ に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}$$

$\boxed{5.4}$ **Amdahl の法則**
コンピュータ科学者の Amdahl によれば，システム

の一部を改良したときに得られる全体の性能向上率（元の速さの何倍になったか）は，全体のなかの割合 p の部分が q 倍の速さに改良されたとして，次の式で与えられる．

$$S(p,q)=\frac{1}{(p/q)+(1-p)}=\frac{q}{p+q(1-p)}$$

(1) 全体の 80%の部分のコンピュータの処理をプロセッサの数を増やして 10 倍，100 倍，1000 倍，$\cdots$ に処理できるとしたとき，その極限として得られる性能は元の何倍か．

(2) 性能向上に要する費用対効果の指標として，$E=\dfrac{S(p,q)}{q}$ という量を定義する．$0\le p<1$ に対して，E は，q についての減少関数であることを示せ．

$\boxed{5.5}$ **楕円面の接平面**
楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の式を求めよ．

$\boxed{5.6}$ $f(x,y)=(x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値の候補点をすべて挙げ，最大・最小値を求めよ．

$\boxed{5.7}$ **三角錐の体積**
平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\quad(a,b,c>0)$$

と 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

$\boxed{5.9}$
周囲の長さを一定とする三角形の中で，面積が最大となるものは正三角形であることを示せ．

$\boxed{5.10}$

楕円体

$$16x^2+4y^2+9z^2=144$$

の内部に収まる直方体のうち，体積が最大のものを求めよ．ただし，直方体の各面は，3 つの座標平面に平行であるとする．（図は $x\ge0, y\ge0, z\ge0$ の象限のみを描いている．）