注意 1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。

試験日		所属	部	情報科学部					科目等履修生	学生番号	–
座席番号	–		学科	ID	IC	IS	IM	IN		フリガナ	組
			年次	1	2	3	4			氏名	

微積分学I 第3回中間テスト (03セット) 解答例 〈真貝〉

[1] $f(x)=x^2,\ g(x)=e^{3x}$ としてライプニッツの公式を使う.

$f'(x)=2x$, $f''(x)=2$ より $k\geq 3$ に対して $f^{(k)}(x)=0$.

$g'(x)=3e^{3x}$, $g''(x)=3^2e^{3x}$ などから $g^{(k)}(x)=3^ke^{3x}$

ゆえに
$$(f\cdot g)^{(n)}=\binom{n}{0}f\cdot g^{(n)}+\binom{n}{1}f'\cdot g^{(n-1)}+\binom{n}{2}f''g^{(n-2)}+0+0+\cdots$$
$$=1\cdot x^2\cdot 3^ne^{3x}+n\cdot 2x\cdot 3^{n-1}\cdot e^{3x}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 3^{n-2}\cdot e^{3x}$$
$$=(9x^2+6nx+n(n-1))3^{n-2}\cdot e^{3x}\ /\!/$$

[2] (1) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, $f(0)=1$

$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, $f'(0)=\frac{1}{3}$

$f''(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{3}}$, $f''(0)=-\frac{2}{9}$

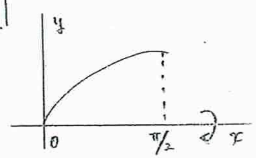
これより $f(x)\simeq 1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2!}x^2=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$.

(2) $\sqrt[3]{60}=\sqrt[3]{64-4}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$

(1)で得た近似式より $\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}\simeq 1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{16}\right)^2=0.97874$

したがって $\sqrt[3]{60}\simeq 3.91490$ (本当の値は $3.91486\cdots$)

[4]



$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\cdot(\sin x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)\right\}=\frac{\pi^2}{4}\ /\!/$$

[3] C を積分定数とする

(1) $I_1=\int(\sin x+\cos 2x+e^{3x})\,dx$
$$=-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}e^{3x}+C\ /\!/$$

(2) $I_2=\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$
$$=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx$$
$$=\log|\sin x|+C\ /\!/$$

(3) $I_3=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
$$=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}\,dx$$
$$=\log(e^x+e^{-x})+C\ /\!/$$
(常に正なので絶対値不要)

(4) $I_4=\int x^n\cdot\log x\,dx$
$$=\int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'\cdot\log x\,dx$$
$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C\ /\!/$$

(5) 部分分数分解として
$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ とすると

右辺を通分した分子 $=(A+B)x+A-B$.

なので $\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}$ $\therefore A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$

を得る.

したがって
$$I_5=\int\left\{\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{2}|x+1|+C\ /\!/$$
$$=\log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+C\ /\!/$$

(6) $x=\tan\theta$ とおくと.

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\quad\begin{array}{c|c}x&0\to 1\\\hline\theta&0\to\pi/4\end{array}$ より

$$I_6=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\int_0^{\pi/4}d\theta=[\theta]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}\ /\!/$$

(7) $x=2\sin\theta$ とおくと

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ $\quad\begin{array}{c|c}x&0\to 1\\\hline\theta&0\to\pi/6\end{array}$ より

$$I_7=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\int_0^{\pi/6}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/6}d\theta=[\theta]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{6}\ /\!/$$

所属 科 年・科目等履修生 学生番号 – 氏名