

注 意	1. 右の欄を正確に記入すること。	試験 日	座 席 番 号	所 属	部	情 報 科 学 部				学生番号				
	学科				IC(IJ)	IS	IM	IN	科目等履修生	フリガナ				
	年次				1	2	3	4	氏 名					

微積分学Ⅰ 第1回 中間テスト (Gセット) 解答例 真見

[1] (1) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = x$ とおくと.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\sin^{-1}$ の値域 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、この式を満たす x は、 $x = \frac{\pi}{3}$ である。

(2) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = x$ とおくと

$$\tan x = -\sqrt{3}$$

$\tan^{-1}$ の値域 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $x = -\frac{\pi}{3}$ である。

[2] (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{3}{5})^n - 1}{(\frac{3}{5})^n + 1} = -1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) \times \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

[3] 右辺 = $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$

$$= \frac{1}{4} \{ e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} \}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{x+y} - e^{-x-y})$$

$$= \sinh(x+y) = \text{左辺} //$$

[4] $t = \tan \frac{\theta}{2}$ は、右図の三角形の辺の比を表すので、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

である。これから

$$\begin{cases} \sin \theta = \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \theta = \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

[5] 2項定理より

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot x^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \dots \\ &= x^n + n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

[6] $x \in [0, 1]$ を n 等分し、
 短冊状に分割して考える。
 左から k 番目の長方形の面積 A_k は $A_k = \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$ であるから、

長方形 n 個の和 S_n は、

$$S_n = \sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$n \rightarrow \infty$ の limit では

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{4} // \end{aligned}$$

(結局 $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$ と同じ)

所 属	科	年	科目等履修生	学生番号		氏 名	
-----	---	---	--------	------	--	-----	--