

【重要】 答案は、別紙の答案用紙に記入すること。

解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。

答案には、答えだけではなく、導出の過程も記すこと。

問題用紙は回収しない。各自、持ち帰り、最終授業日に持参すること。

1. (導関数の計算)

(1) (a) $y = e^x$ および $y = e^{-x}$ のグラフを描け .

(b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ を微分せよ . また , この関数のグラフを描け .

(2) $\frac{d^2}{dx^2} x^2 \cos x$ を求めよ .

(3) (a) $\frac{d}{dx}(x^2 + 1)$, $\frac{d^2}{dx^2}(x^2 + 1)$, $\frac{d^3}{dx^3}(x^2 + 1)$ をそれぞれ求めよ .

(b) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ は , $f''(x) - 2f'(x) + f(x) - 2e^x = 0$ を満たすことを示せ .

(c) $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 + 1)e^x$ を求めよ . ここで , n は自然数である .

必要であれば , Leibniz の公式 $(f g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ を用いてよい .

2. (積分) 次の値を求めよ .

(1) $\int \cos 2x \, dx$

(2) $\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$ (ヒント : $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

(3) $\int x \log x \, dx$ (部分積分)

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (置換積分)

(5) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ (部分分数)

3. (積分の応用)

(1) 半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ (r は定数) を x 軸のまわりに回転してできる球の体積を求めよ .

(2) 懸垂線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の $-1 \leq x \leq 1$ の長さを求めよ .

4. (偏微分) どちらか 1 問を選択して答えよ .

(1) 2 次元のラプラシアンを $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする . $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ として , $\Delta_2 \log r$ を求めよ .

(2) $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき , 次の関係式を示せ .

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$