

【重要】 答案は別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
 解答は所定の解答欄に記入し、小問題の番号を記載すること。
 答案には、答えだけではなく、導出の過程も記すこと。

問題 1 (1)-(4) を求め、(5),(6) に答えよ。

$$(1) y_1 = \frac{d}{dx} \left(8 + 3x^5 + \frac{1}{2x} + 5\sqrt{x} \right)$$

(5) ライブニッツの公式

$$(2) y_2 = \frac{d}{dx} (e^x + 2 \sin x + \cos x + \tan x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

$$(3) y_3 = \frac{d}{dx} \left(\cos x \sin x + \frac{\log x}{x} \right)$$

を利用して、 $y_5 = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 \sin x)$ を求めよ。

$$(4) y_4 = \frac{d}{dx} (\log 3x + \cos(x^2))$$

(6) $0 < x < \pi$ に対し、 $y = \log(\sin x)$ の導関数を求め、増減表を作成し、極値を調べてグラフを描け。 $\lim_{t \rightarrow 0} \log t = -\infty$ を使ってよい。

問題 2 (1)-(5) を求め、(6) に答えよ。

$$(1) I_1 = \int \left(8 + 3x^5 + \frac{1}{2x} + 5\sqrt{x} \right) dx$$

$$(4) I_4 = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx \quad (\text{ヒント : } t = \sin x \text{ とおいて置換積分})$$

$$(2) I_2 = \int (e^x + 2 \sin x + \cos x + \tan x) dx$$

$$(5) I_5 = \int \frac{dx}{x^2 - 25}$$

$$(3) I_3 = \int x^4 \log x dx$$

(6) 半径 r の円の面積が πr^2 であることを、積分を使って説明せよ。

問題 3 関数 $f(x)$ について、 $x = a$ まわりの、テーラー展開が次式で表される。下の (1)-(3) に答えよ。

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

- (1) e^x に対する $x = 0$ まわりのテーラー展開 (マクローリン展開) を導出せよ。
- (2) $e^{0.1}$ を小数第 2 位まで求めよ。小数第 3 位は四捨五入せよ。
- (3) $\log(1+x)$ を $x = 0$ まわりでテーラー展開し、4 次の項まで記せ。

問題 4 次の (1)-(3) に示す 3 題のうち 2 題を選択して答えよ。

(1) $z = e^{4xy}$ に対して、2 階の偏導関数をすべて求めよ。

(2) $z = \log(x^2 y^2)$ とする。 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, xy \neq 0$ のとき $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ。

(3) $z = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のとき、次式を示せ。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2$$