微積分学 I　2014 年度　（参照許可物　なし）　2014.7.31

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

$\boxed{\text{問題 1}}$ 〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5)–(6) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(7 + 6x^5 + \dfrac{4}{x} + 3\sqrt{x} + e^x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\sin x + \cos x + \log x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 x + \sin(x^2)\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 \log x + \tan x\right)$

(5) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_5 = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - x)\sin x$ を求めよ．

(6) $y = e^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 〔積分とその応用〕(1)–(6) を求め，(7) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(7 + 6x^5 + \frac{4}{x} + 3\sqrt{x} + e^x\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int (\sin x + \cos x + \tan x)\, dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$
（ヒント $t = \sin x$ と置換）

(5) $I_5 = \displaystyle\int x^2 \log x\, dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} dx$

(7) $y = f(x)$ のグラフの $a \le x \le b$ の長さ L は，

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

で与えられる．カテナリー曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ の，$0 \le x \le 1$ の長さを求めよ．

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) e^x に対する $x = 0$ のまわりのテーラー展開（マクローリン展開）を導出せよ．

(2) $\sin x$ と $\cos x$ の マクローリン展開 が，

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

と表されることを用いて，e^{ix} を $\cos x, \sin x$ を用いて表わせ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y) = e^{2x}\cos 3y$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ とするとき，$H = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする．全微分の対応として，$dx = \dfrac{\partial x}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$ および $dy = \dfrac{\partial y}{\partial r}dr + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$ が成り立つことを利用して，次の式を示せ．

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$