微積分学 I　定期試験　2016 年度前期　2016 年 8 月 1 日

【担当教員】真貝寿明，平嶋洋一，尾形尚子，桑子和幸

【対象学生】情報科学部　全学科　1 年

【参照許可物】なし

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

$\boxed{\text{問題 1}}$ 〔微分とその応用〕(1)–(6) を求め，(7)–(8) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(2e^x + 3 + 4x^5 + \dfrac{1}{6x} + \sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(2\sin x + 3\cos x + \log x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(x \log x\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

(5) $y_5 = \dfrac{d}{dx}(x^2+3)^8$

(6) $y_6 = \dfrac{d}{dx}\log\left(x^4\right)$

(7) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_7 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 \cos x\right)$ を求めよ．

(8) $y = \sqrt{2}\, x e^{-(x^2-\frac{1}{2})}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x e^{-(x^2-\frac{1}{2})} = 0$ であることを用いてよい．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 〔積分とその応用〕(1)–(7) を求め，(8) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(2e^x + 3 + 4x^5 + \frac{1}{6x} + \sqrt{x}\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int (2\sin x + \cos x)\, dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int (2x+3)^8\, dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{\tan x} dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int \frac{x+3}{(x+4)(x+2)} dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int x^2 \log x\, dx$

(7) $I_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{4-\sin^2 x} \cos x\, dx$
（ヒント $t = \sin x$ と置換）

(8) $y = |\sin x|$ の $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．
ヒント．$y = f(x)$ を $\alpha \le x \le \beta$ の区間で，x 軸のまわりに回転させた立体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\left(f(x)\right)^2\, dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^x$ をマクローリン展開せよ．3 次の項までと，n 次の項を記せ．

(2) $g(x) = \sin x$ をマクローリン展開せよ．5 次の項まで記せ．

(3) (2) で求めた近似式を利用して，$\sin 0.2$ を小数第 3 位まで求めよ．(小数第 4 位を四捨五入せよ)

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y) = x\sin 2y$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(3) $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

$\boxed{\text{問題 1}}$ 微分の問題 30 点

(1) 4 点 $y_1 = 2e^x + 0 + 20x^4 - \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2) 4 点 $y_2 = 2\cos x - 3\sin x + \dfrac{1}{x}$

(3) 4 点 $y_3 = \log x + 1$

(4) 4 点 $y_4 = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

(5) 4 点 $y_5 = 16x(x^2+3)^7$

(6) 4 点 $y_6 = \dfrac{4}{x}$

(7) 3 点

$$\begin{aligned} y_7 &= x^2\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2xn\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + 2\frac{n(n-1)}{2}\cos\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(x^2 - n(n-1)\right)\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2xn\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(8) 3 点 $y' = \sqrt{2}(1-2x^2)e^{-x^2+\frac{1}{2}}$ より

$x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $y' = 0$ となる．

$y'' = 2\sqrt{2}x(2x^2-3)e^{-x^2+\frac{1}{2}}$

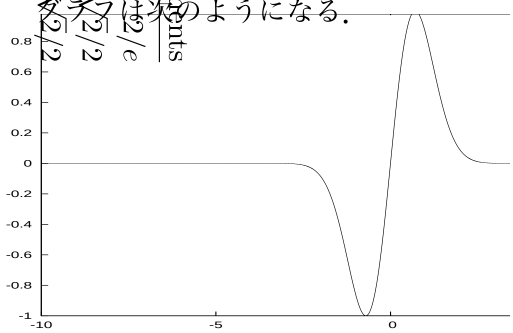
より

$x = 0, \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき $y'' = 0$ となる．

増減表は次のようになる．

x	-∞		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		∞
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↘		↘	-1	↗	0	↗	1	↘		↘	0
			変曲点		最小		変曲点		最大		変曲点		

グラフは次のようになる．



$\boxed{\text{問題 2}}$ 積分の問題（C を積分定数とする.） 30 点

(1) 4 点 $I_1 = 2e^x + 3x + \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{6}\log|x| + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

(2) 4 点 $I_2 = -2\cos x + \sin x + C$

(3) 4 点 $I_3 = \frac{1}{18}(2x+3)^9 + C$

(4) 4 点 $I_4 = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$

(5) 4 点 $I_5 = \int \left(\frac{1/2}{x+2} + \frac{1/2}{x+4}\right) dx = \frac{1}{2}(\log|x+2| + \log|x+4|) + C$

(6) 4 点 $I_6 = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1) + C$

(7) 3 点 $t = \sin x$ と置換すると，$dt = \cos x dx$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow \pi/6 \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1/2 \end{array}$ より，

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{4-\sin^2 x}\cos x\,dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{4-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{5}{3} \end{aligned}$$

(8) 3 点 $V = 2\int_0^{\pi/2}\pi(\sin x)^2 dx = 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \pi\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 級数展開の問題 20 点

(1) 題意より $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$

(2) $g(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

(3) $\sin 0.2 = 0.2 - 0.001\dot{3} + 0.000002\dot{6} \fallingdotseq 0.1986.$

よって求める値は 0.199

$\boxed{\text{問題 4}}$ 偏微分の問題 20 点

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x\sin 2y, \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\cos 2y$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \dfrac{8x^2y - 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \dfrac{8y^3 - 6y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2y^3 - 6x^2y}{(x^2+y^2)^3},$

よって，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta \cdots ① \\
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta \cdots ②
\end{aligned}$$

このとき，①，②の辺々を加えると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

となる．