**微積分学 I　定期試験　 2019 年度前期　　2019 年 8 月 1 日実施**

【担当教員】真貝寿明，平嶋洋一，橋爪恵

【対象学生】情報科学部　全学科　 1 年

【参照許可物】なし

**【重要】** 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

問題 1　〔微分とその応用〕(1)–(3) を求め，(4), (5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 \log x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\sin(3x+2)$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left((x^2+2x)\cos x\right)$ を求めよ．

(5) $y(x) = e^{-x}\sin x$ の導関数を求め，$x = [-\pi, \pi]$ の範囲で増減表を作成し，グラフを描け．
ただし，必要であれば，$e^{-\frac{3}{4}\pi} \simeq 0.09$, $e^{-\frac{1}{2}\pi} \simeq 0.21$, $e^{-\frac{1}{4}\pi} \simeq 0.46$, $e^{\frac{1}{4}\pi} \simeq 2.20$, $e^{\frac{1}{2}\pi} \simeq 4.81$, $e^{\frac{3}{4}\pi} \simeq 10.6$ であることを用いてよい．

問題 2　〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \sin(3x+2)\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$

（ヒント：$x = \tan\theta$ と置換）

(5) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の上部を表す関数 $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ と $x$ 軸で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

ヒント： $y = f(x)$, $x = \alpha, x = \beta$ $(\alpha \leq \beta)$ および $x$ 軸で囲まれた図形を
$x$ 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 $V$ は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\left(f(x)\right)^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開が，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $f(x) = e^{2x}$ をマクローリン展開せよ．3 次の項まで求めよ．

(2) $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開せよ．$n$ 次の項を求めよ．

(3) $h(x) = \log(1+x)$ をマクローリン展開せよ．2 次の項まで求めよ．

(4) 毎年 $x$% の経済成長が続くとき，元の 3 倍になるまでの年数 $N$ は，およそ $N \simeq \dfrac{110}{x}$ で求められる．この式を導け．$\log 3 = 1.0986$ を用いてよい．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕

(1) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ とするとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z(x,y) = \sin^2 x \cdot \cos y$ 上の点 $(x,y) = (\pi/6, \pi/6)$ における $x$ 方向・$y$ 方向の接ベクトルを求めよ．
ヒント：点 $(a,b)$ での接ベクトルは $(1, 0, \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)})$ と $(0, 1, \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)})$ で与えられる．

(3) $(x,y)$ 座標面内を $(u,v)$ をパラメータとして，$\begin{cases} x(u,v) = u+v, \\ y(u,v) = u-v \end{cases}$ で点が移動するとき，
$z = x^2 - y^2$ に対して，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ．