

【担当教員】真貝寿明

【参照許可物】なし

【重要】 答案には答えだけではなく、導出の過程も記すこと。

午前 9 時 10 分までに (厳守のこと), 答案を写真撮影したものを,
提出すること。

提出先 (下記 or 右の 2 次元 QR コード)

<https://forms.gle/VxbBcdw4Qc3giLNZA>



問題 1 [微分とその応用] (1)–(4) を求め, (5) に答えよ。

$$(1) y_1 = \frac{d}{dx} (e^x \log x)$$

$$(2) y_2 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right)$$

$$(3) y_3 = \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$(4) y_4 = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 \sin 2x) \quad (n: \text{自然数})$$

(5) $y(x) = e^{-x} \cos x$ の導関数を求め, $x = [0, 3\pi]$ の範囲で増減表を作成し, グラフを描け。

問題 2 [積分とその応用] (1)–(4) を求め, (5) に答えよ。

$$(1) I_1 = \int (4x + 5)^6 dx$$

$$(2) I_2 = \int \frac{x + 3}{(x + 4)(x + 2)} dx$$

$$(3) I_3 = \int x^3 \log x dx$$

$$(4) I_4 = \int_0^{1/2} \sqrt{4 - x^2} dx$$

(ヒント: $x = 2 \sin \theta$ と置換)

(5) 地球を完全な球だと考える。北半球を北緯 30 度の面で赤道面と平行に切り分けるとき, 分割された北半球の体積比は何対何か。

問題3 [級数展開] 関数 $f(x)$ の $x = a$ における級数展開 (テーラー展開) は, 次式で表される.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

また, $x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という.

- (1) $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開の式を n 次の項まで一般的に求めよ.
- (2) $g(x) = (1+x)^{12}$ をマクローリン展開して, 2次までの項 (近似式) を記せ.
- (3) 1オクターブの音の差は振動数 (周波数) が2倍になる差である. 平均律の音階 (1オクターブを12音として, 振動数で等分割する) を考えるとき, 隣り合う音の振動数は何倍異なるか. ヒント: 前問の展開式を用いよ. 必要であれば, $\sqrt{102} \simeq 10.1$ を用いよ.

問題4 [偏微分]

- (1) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ とするとき, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.
- (2) 関数 $z(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$ のとき, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.
- (3) 点A (x, y) と, Aからわずかに離れた点B $(x+dx, y+dy)$ の距離 L は, $L^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ より求められる. 極座標表示 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ を用いて, 点Aを (r, θ) , 点Bを $(r+dr, \theta+d\theta)$ とすると, L^2 は

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

と対応することを示せ.

ヒント. 全微分の対応として, $dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$ などが成り立つことを利用せよ.

