2022 年度前期　微積分学 I（全学科 1 年）　定期試験 問題　2022 年 8 月 1 日

【担当教員】白畑正芳，真貝寿明，濵田悦生，真鍋征秀，宮本俊幸
【対象学生】情報科学部　全学科　１年
【参照許可物】なし

【重要】 答案は別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由．答案用紙にはどの問題かわかるように記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．
問題 1 と問題 2 がシラバスの到達目標 (1)(2) に対応 [成績 C または D の判定基準].
問題 3 が到達目標 (3) に対応 [成績 B]．問題 4 が到達目標 (4) に対応 [成績 A].

問題 1　〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}(20x+22)^8$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2\log x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g) = (f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2\sin 2x\right)$　(n: 自然数)　を求めよ．

(5) $y = x^3e^{-x}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$ を既知としてよい．$e^3 \sim 20.1$ である．

問題 2　〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int (20x+22)^8\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$　（ヒント：$x = 2\sin\theta$ と置換）

(5) カテナリー曲線 $y = \cosh x \left(= \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$，$x=0, x=1$ および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V を求めよ．
ヒント：$y = f(x), x = \alpha, x = \beta$ $(\alpha \le \beta)$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\left(f(x)\right)^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ における級数展開（テーラー展開）は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また, $x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．次のうちから<u>3問を選択して答えよ</u>.

(1) $g(x) = 2^x$ をマクローリン展開せよ．2次までの項を記せ．必要であれば，$b>0$ である b に対して $(b^x)' = b^x \log b$ を用いてよい．

(2) (1) で求めた近似式を利用して，$\sqrt[3]{2}$ を小数第2位まで求めよ．（小数第3位を四捨五入せよ．）必要であれば，$\log 2 = 0.693$, $(\log 2)^2 = 0.480$ を用いてよい．

(3) $h(x) = \log(1+2x)$ のマクローリン展開を3次の項まで記せ．ただし, $|x| < \dfrac{1}{2}$ とする．

(4) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は実数とする．これらの平均値を $\overline{x}$ とする．$z = e^{ix_1}e^{ix_2}\cdots e^{ix_n}$ を三角関数と $\overline{x}$ を用いた式で表せ．$i^2 = -1$ である．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕<u>2つ選択して答えよ.</u>

(1) $f(x,y) = e^{-x}\sin(2y)$ の2階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $z(x,y) = x^2 + xy + y^2$ に対して，$\begin{cases} x(t) = 2\sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(3) $z = f(x,y) = \tilde{f}(r,\theta)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$