2024 年度前期　微積分学 I（全学科 1 年）試験　2024 年 7 月 29 日実施

【担当教員】白畑正芳，真貝寿明，濵田悦生，真鍋征秀，宮本俊幸
【対象学生】情報科学部　全学科　１年
【参照許可物】なし

【重要】 答案は別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由．答案用紙にはどの問題かわかるように記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．
問題 1 と問題 2 がシラバスの到達目標 (1)(2) に対応 [成績 C または D の判定基準].
問題 3 が到達目標 (3) に対応 [成績 B]．問題 4 が到達目標 (4) に対応 [成績 A].

問題 1　〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}(3x+4)^9$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2\log(2x)\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g) = (f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) f^{(k)}g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left((x^2+3x)\cos x\right)$　(n: 自然数)　を求めよ．

(5) $y = -xe^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = 0$ を既知としてよい．

問題 2　〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int (3x+4)^9\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$　（ヒント：$t = \log x$ と置換）

(5) 地球儀を北緯 30 度線を輪郭とする平面で切断したとき，北極側の部分の体積は，地球儀全体の何パーセントか．地球儀を球体として考えて良い．
ヒント：$y = f(x), x = \alpha, x = \beta$ $(\alpha \leq \beta)$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\,(f(x))^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x=a$ における級数展開（テーラー展開）は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また, $x=0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．次のうちから<u>３問を選択して答えよ</u>.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ をマクローリン展開式せよ.

(2) $g_1(x) = \sin x$ と $g_2(x) = x$ は，$x = 0.1$ [rad] のとき，どちらがどれだけ大きいか．小数点５桁まで比較せよ.

(3) 経済学では, 毎年 $x\%$ の経済成長が続くとき, 元の２倍になるまでの年数 N は, およそ $N \simeq 70/x$ で求められるというマジックナンバー 70 の近似公式がある．この式を $\log(1+x) \sim x - \dfrac{1}{2}x^2$ の近似式を用いて導け．$\log 2 = 0.6931$ を用いてよい.

(4) $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を $x=1$ のまわりでテーラー展開せよ.

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕すべて答えよ.

(1) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ の２階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) (x,y) 座標面内を θ をパラメータとして，$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta, \\ y(\theta) = 2\sin\theta \end{cases}$ で点が移動するとき，$z(x,y) = x^2 - y^2$ の最大値を求めよ.

(3) 点 A (x,y) と，A からわずかに離れた点 B $(x+dx, y+dy)$ の距離 L は，$L^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ より求められる．極座標表示 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて，点 A を (r,θ)，点 B を $(r+dr, \theta+d\theta)$ とすると，L^2 は

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

と対応することを示せ.
ヒント．全微分の対応として，$dx = \dfrac{\partial x}{\partial r}dr + \dfrac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$ などが成り立つことを利用せよ.