教科書の例題・問題のすべてと，章末問題からの抜粋です．

第 1 章　微分方程式概説

1.1　微分方程式の定義

例題 1.1
物体の位置 x を時間 t の関数として $x(t)$ で表すと，速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ は，それぞれ $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ である．

- 加速度がゼロのとき
  (1) 速度 $v(t)$ を求めよ．
  (2) 位置 $x(t)$ を求めよ．
  (3) 初速度を v_0 として，速度 $v(t)$ を求めよ．
  (4) 初期の位置を x_0，初速度を v_0 として，位置 $x(t)$ を求めよ．
- 加速度が一定値 a のとき
  (5) 位置 $x(t)$ を求めよ．
  (6) 初期の位置を x_0，初速度を v_0 として，位置 $x(t)$ を求めよ．

問題 1.2
物体が重力だけを受けて鉛直方向に運動することを，自由落下運動という．自由落下運動には一定の重力加速度 g が働く．初速度ゼロ，高さ H から 自由落下する物体の位置を表す方程式を立てて解け．

1.2　代表的な微分方程式

例題 1.3　k, A, B は定数とする．

(1) $y = e^{kx}$ が，$\dfrac{dy}{dx} = ky$ の微分方程式をみたすことを示せ．

(2) $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ が，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = k^2y$ をみたすことを示せ．

問題 1.4　k, A, B は定数とする．

(1) $y = Ae^{-kx}$ が，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -ky$ をみたすことを示せ．

(2) $y = A\sin kx + B\cos kx$ が，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -k^2y$ をみたすことを示せ．

1.3　微分方程式の種類

1.3.1　常微分方程式と偏微分方程式

1.3.2　線形微分方程式と非線形微分方程式

1.3.3　同次微分方程式と非同次微分方程式

$\boxed{1.2}$ （微分方程式の分類）
関数 $y(x)$ に対する次の微分方程式の階数・「同次／非同次」の別・「線形／非線形」の別を述べよ．

(1) $y' = x$　　(2) $y' = x^2$

(3) $y'' = y^2$　　(4) $y'' = y + 1$

(5) $y'' + 2y' - y = e^x$　　(6) $y'' + 3y' = \sin x$

(7) $y^{(3)} - y^2 = 0$　　(8) $y'' + y = y^{(3)}$

(9) $y^{(3)} = e^x \cos x$

1.4　初期値問題と境界値問題

1.4.1　初期値問題

1.4.2　境界値問題

$\boxed{1.1}$ 次の語句の意味を説明せよ．

(1) 一般解・特殊解・特異解・基本解
(2) 常微分方程式・偏微分方程式
(3) 初期条件・初期値問題
(4) 境界条件・境界値問題

1.5　解軌道と勾配場

1.6　連立微分方程式

1.7　モデル化・微分方程式を作る方法

例題 1.5
必要であれば文字を補って，微分方程式を立式せよ．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\sin x$ である曲線がみたす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で増加していくバクテリアの数がしたがう微分方程式．

(3) その時の感染者の2乗に比例して増加するインフルエンザ感染者数を求める微分方程式．

(4) 質量 m のパラシュートが重力 mg を受けて落下するとき，高さの時間変化 $y(t)$ は運動方程式 $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg$ にしたがう．さらに，速度の2乗に比例する抵抗力が加わるときの運動方程式．

問題 1.6
必要であれば文字を補って，微分方程式を立式せよ．

(1) xy 平面上の各点で，法線の傾きが $\sin x$ である曲線がみたす微分方程式．

(2) 原点から，距離の逆2乗で比例する力を受ける物体の運動方程式．

(3) その時の総数に比例して崩壊していく原子核の数を求める微分方程式．

(4) 時間に対して一定の割合で成長してゆくが，自分自身の大きさに比例して成長率が鈍化する雪の結晶の大きさを求める微分方程式．

例題 1.7

(1) 円の式 $x^2+y^2=r^2$ で，r を変化させる曲線群を考える．これらが，1つの微分方程式から出てきた解だとすると，元の微分方程式は何か．

(2) 同様，原点を通る傾き k の直線群 $y=kx$ が解となる微分方程式を求めよ．

章末問題

$\boxed{1.3}$ （円の面積・球の体積）

(1) 半径が r の円の面積を $S(r)$ とする．微分の定義

$$\frac{dS}{dr}=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{S(r+\Delta r)-S(r)}{\Delta r}$$

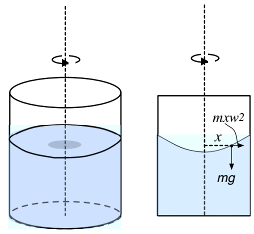
を用いると，$S(r)$ のみたす微分方程式が $\dfrac{dS}{dr}=2\pi r$ となることを示せ．

(2) (1) で得られた微分方程式は，
「面積の増加分 $dS=$ 円周 $\times\, dr$」
と解釈できる．半径が r の球の体積を $V(r)$ とするとき，
「体積の増加分 $dV=$ 表面積 $\times\, dr$」
と解釈して微分方程式を立てよ．また，$V(r)$ を積分して求めよ．

$\boxed{1.4}$ （回転する液体表面）
ビーカーに液体を入れて，中心を軸に全体を回転させる．液体の表面は重力と遠心力のつりあいによって中心がくぼみ，外側が盛り上がる．回転の角速度を ω とすると，中心から半径 x の位置にある液体の素片（質量 m）は，重力 mg と遠心力 $mx\omega^2$ のつりあいから，液体表面の高さ y は，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mx\omega^2}{mg}$$

をみたす．液体表面の形状は何か．



第2章　1階微分方程式

2.1　変数分離法

2.1.1　変数分離法

例題 2.1　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x-1$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=-xy^2$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=y-1$　　(4) $\dfrac{dy}{dx}=y(y-1)$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y(x^2+1)}$　　(6) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$

問題 2.2　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'=xy$　　(2) $y'=\dfrac{x}{y}$

(3) $y'=\dfrac{y}{x}$　　(4) $y'=\tan x$

(5) $y'=\tan y$　　(6) $y'=\dfrac{\sin x}{\cos y}$

(7) $y'=e^{x-y}$　　(8) $y'=y^2\log x$

(9) $y'=y(y+1)$

応用例　放射性元素の崩壊

例題 2.3
放射性物質は一定の確率で崩壊を起こすことが知られている．したがって，単位時間に崩壊してゆく原子の数は，その瞬間の原子の数に比例する．

(1) 時刻 t における原子の数を $N(t)$ とする．崩壊する割合（比例定数）を $\lambda(>0)$ として，$N(t)$ に対する微分方程式を作れ．

(2) この微分方程式の解として，$N(0)=N_0$ をみたすものを求めよ．

(3) 崩壊定数 λ と半減期 T との関係を求めよ．$\log 2 = 0.6931$ とする．

(4) $t=1$ のとき，$N(t)$ が N_0 の 99%となっていた．この物質の半減期を求めよ．$\log 100 = 4.605, \log 99 = 4.595$ とする．

応用例　放熱現象

例題 2.4
沸かし終えた風呂の温度の時間変化率は，そのときの室温との差に比例する．すなわち，室温が 10 [°C] のとき，時刻 t における風呂の温度 $T(t)$ [°C] は，

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T-10) \qquad (k>0; \text{定数})$$

となる．いま，$t=0$ で 60 [°C] だった風呂が，10 分後に 55 [°C] になった．40 [°C] になるのは何分後か．$\log 2 = 0.6931$, $\log 3 = 1.099$, $\log 5 = 1.609$, $\log 10 = 2.303$ とする．

応用例　人口予測の 2 つのモデル

例題 2.5
Malthus は，著書『人口論』の中で「人口は制限されなければ幾何級数的に増加する」と述べている.「食料などの生活環境が良好で，出生率・死亡率が安定しているならば，人口の増加速度は，そのときの総人口に比例する」という主張である．人口 x を時間 t の関数として式を立てて解け．初期条件は，$t=0$ で $x=x_0$ とする．

例題 2.6
Verhulst は，Malthus の人口爆発モデル（例題 2.5）を改良し,「人口の増加率は人口が増えると減少する」というモデルを考えた．あまりにも同一種の生物が増えすぎると食糧が枯渇して種の個体数の増加率が下がるだろう，という理由である．Malthus のモデル $\dfrac{dx}{dt} = kx$ における比例定数 k を定数ではなく，

$$k = a - bx \qquad (a, b \text{ は，正の定数})$$

として，

$$\frac{dx}{dt} = (a-bx)x$$

と考えるモデルである（これをロジスティック方程式という）．これを解け．

2.1.2　変数分離型へ変換できるもの

例題 2.7　$y = xu$ と置換して次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+y^2}{x^2} \quad (x>0)$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

例題 2.8

(1) $u = x+y+1$ とおき，$y' = x+y+1$ を解け．

(2) $u = x+y$ とおき，$y' = (x+y)^2$ を解け．

2.2　積分因子法

2.2.1　定数係数微分方程式の場合

例題 2.9　次の $y(x)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y' + 2y = 0$　　(2) $y' + 2y = e^{2x}$

(3) $y' + 2y = 3x + 4$

例題 2.10　次の $y(x)$ に対する初期値問題を解け．

(1) $y' - 3y = 0,\ y(0) = 3$

(2) $y' - 3y = 0,\ y(0) = -1$

応用例　雨滴の終端速度

例題 2.11
雨滴が無限大の速さにならないのは，空気抵抗により減速されるからである．ここでは，空気抵抗が物体の速度 v に比例すると考えよう．すなわち，抵抗の比例定数を k，雨滴の質量を m，重力加速度を g とすれば，運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

となる．速度 v の振舞いを論じ，初速をゼロとして雨滴の終端速度（最終的に一定となる速度）を求めよ．

応用例　空気抵抗のある場合のボールの軌跡

例題 **2.12**
水平方向を x 軸，鉛直方向を y 軸（上向きが正）に取り，ボールを投げる位置を原点とする．抵抗の比例定数を k，粒子の質量を m，重力加速度を g，時刻 t での速度を $(v_x(t),\, v_y(t))$ とすれば，運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= -kv_x \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -mg - kv_y \end{aligned}$$

となる．初速度を v_0，投げ上げる角度を θ とすれば，初速度の x, y 成分は $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ となる．

(1) 時刻 t での ボールの速度 $(v_x(t),\, v_y(t))$ を求めよ．

(2) 時刻 t での ボールの位置 $(x(t),\, y(t))$ を求めよ．

(3) 水平方向の到達点 X を，そこへ到達するまでの時間 T を用いて X を T の関数として（θ を用いずに）表せ．

$X(T)$ の式は，k と T を与えないと値が定まらない．簡単のため，以下では $k^2v_0^2 - m^2g^2 = 0$，すなわち $k = mg/v_0$ としよう．

(4) $X(T)$ の最大値を与える T の値が，$T = m/k$ であることを確かめよ．

(5) $k = mg/v_0$, $T = m/k$ の条件から，ボールを投げ上げる角度は，45 度より高い方がよいか，それとも低い方がよいかを示せ．

2.2.2　係数が関数の微分方程式の場合

例題 **2.13**　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y' + xy = 0$

(2) $y' + xy = 2x$

(3) $y' - \dfrac{y}{x} = 3$

(4) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x + 4$

問題 **2.14**
$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．初期条件が与えられたものは特殊解を求めよ．

(1) $y' + \dfrac{y}{x} = 3\cos x$

(2) $xy' + 2y = 4x^2$,　$y(1) = 2$

(3) $xy' + 2y = x\sin 2x$,　$y(\pi) = 0$

(4) $y' + (\tan x)\, y = 3\sin x$

(5) $y' + \dfrac{1}{\tan x}\, y = 2\sin x$

2.3　非同次微分方程式の一般解

2.3.1　未定係数法

例題 **2.15**　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y' + 2y = e^{2x}$

(2) $y' + 2y = 3x + 4$

(3) $y' + 2y = 3\sin 4x$

(4) $y' + 2y = 3\sin 4x + 3\cos 4x$

(5) $y' + 2y = e^{-2x}$

(6) $y' + xy = 2x$

問題 **2.16**
$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．初期値が与えられているものは初期値問題の解を求めよ．

(1) $y' + 2y = 3x^2 + 4x + 5$

(2) $y' + 2y = 4\cos 2x$

(3) $y' - 2y = 4e^{-2x}$

(4) $y' - 2y = 4e^{2x}$

(5) $y' - y = -2e^{x}$,　$y(0) = 3$

(6) $y' - y = -2e^{-x}$,　$y(0) = 2$

応用例　積立定期貯金モデル

例題 **2.17**
毎月 r%の複利で利子がつく積立定期貯金がある．毎月 k 円を積み立てるとすると，貯金総額 $S(t)$ 円 [ただし t の単位は 1ヶ月] の増加分は，次式で与えられる．

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r}{100}S + k$$

(1) はじめの貯金額を S_0 として，$S(t)$ を求めよ．

(2) 月利 r =0.5%，S_0 =0 円，毎月 k =1 万円の積み立てを 10 年間行った場合，利子として受け取る総額はいくらか．

(3) 100 万円を年利 r =5% の複利で預けたままにするとき，倍額になるのは何年後か．

例題 **2.18**
住宅資金として 3000 万円を年利 2%で借りた．25 年で完済するには，毎年いくら返済すればよいか．