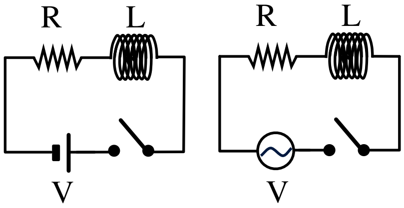
応用例　**RL 回路・RC 回路の過渡現象**

例題 **2.19**
抵抗値 R の抵抗とインダクタンス L のコイルで構成される RL 直列回路を考える．

(1) 回路に加える起電力が一定値 V のとき，電流 I に関する微分方程式を書け．時刻 $t=0$ で $I=0$ とすると，解はどうなるか．

(2) 回路に加える電圧が交流起電力 $V=V_0\sin\omega t$ のとき，定常状態の回路の電流を求めよ．



問題 **2.20**
抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 回路を考える．

(1) 回路に加える起電力が一定値 V のとき，電荷 Q に関する微分方程式を書け．時刻 $t=0$ で $Q=0$ とすると，解はどうなるか．

(2) 回路に加える電圧が交流起電力 $V=V_0\sin\omega t$ のとき，定常状態の回路の電荷を求め，流れる電流を求めよ．

2.3.2　定数変化法

例題 **2.21**　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+xy=2x$　(2) $y'-\dfrac{y}{x}=3$

(3) $y'+\dfrac{y}{x}=3x+4$

問題 **2.22**　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+\dfrac{y}{x+1}=e^x$

(2) $y'+(\tan x)\,y=0$

(3) $y'+(\tan x)\,y=3\sin x$

(4) $y'+(\tan x)\,y=3\sin x+4\cos x$

2.4　Bernoulli 型，Riccati 型，Clairaut 型

例題 **2.23**　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+2y=e^{3x}y^2$

(2) $xy'+y=x^2\sqrt{y}\quad(x>0)$

例題 **2.24**
von Bertalanffy による魚の成長モデルは，魚の体重 $w(t)$ を時間 t の関数，α,β を定数として，

$$\frac{dw}{dt}=\alpha\,w^{2/3}-\beta\,w$$

とするものである．右辺第 1 項は栄養分による体重の増加で魚の表面積に比例するもの．第 2 項は呼吸による体重のロスの割合で魚の体重に比例するものである．$w(0)=0$ として $w(t)$ を求めよ．

例題 **2.25**
接線の両座標軸にはさまれる部分が一定の長さ a であるような曲線を求めよ．

2.5　完全微分形

例題 **2.26**　次の微分方程式を解け．

(1) $(4x+3y)dx+(3x+2y)dy=0$

(2) $(\cos x+\cos y)dx+(e^y-x\sin y)dy=0$

(3) $(2x+\dfrac{1}{y})dx+(2y-\dfrac{x}{y^2})dy=0$

応用例　**保存則の導出**

例題 **2.27**
RLC 直列回路では，回路を流れる電流 $I(t)$ の時間変化を決める微分方程式は

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=V(t)$$

である．ここで，L はコイルのインダクタンス，R は抵抗値，C はコンデンサの電気容量である．Q はコンデンサに蓄えられる電荷で $I=\dfrac{dQ}{dt}$ の関係がある．完全微分形にして保存則を求めよ．

例題 **2.28**
次の式の積分因子は x だけの関数であるとして，解け．

$$(y+xy+\sin y)\,dx+(x+\cos y)\,dy=0$$

問題 2.29
次の微分方程式の積分因子が右に示された関数 $P(x, y)$ であることを利用して一般解を求めよ.

(1) $(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0,\ P(x,y)=1$

(2) $3x^2ydx+(2x^3-4y^2)dy=0,\ P(x,y)=y$

(3) $(xy-y)dx+(xy+x)dy=0,\ P(x,y)=\dfrac{1}{xy}$

(4) $(3x-y)dx+(x-3y)dy=0,\ P(x,y)=x+y$

応用例　断熱変化

例題 2.30
一定量の単原子分子理想気体を容器に入れ，断熱変化（$\Delta Q=0$）を行ったとき，気体の体積 V と温度 T の間に成り立つ関係を求めよ.

2.6 発展的応用

2.6.1 年代測定と贋作鑑定

例題 2.31
1947 年，Vermeer の絵画として持ち込まれた絵が贋作かどうか鑑定することになった．顔料に含まれている鉛 (^{210}Pb) の含有量で年代を判定することになった.

- ほとんどの絵に使われる顔料は，半減期 22 年の放射性物質である ^{210}Pb を含む．^{210}Pb は，ラジウム (^{226}Ra) が半減期 1600 年で崩壊してできる.
- ^{210}Pb に崩壊する ^{226}Ra の総量は，単位時間ごとに，崩壊・減少する ^{210}Pb の総量と等しい．すなわち，^{210}Pb と ^{226}Ra は時間が経つと平衡状態になる.
- 顔料の製造過程では，ラジウムはほとんど除去されるが，完全には除去されない．顔料となった ^{210}Pb は崩壊を始めるが，やがて除去されずに残った微量のラジウムと平衡状態に達する.

以上の過程を微分方程式のモデルにすると，

$y(t)$ = 時刻 t における通常の鉛 1g ごとの ^{210}Pb の量
$r(t)$ = 通常の鉛の中における毎分 1g ごとの ^{226}Ra の崩壊数

とし，λ を ^{210}Pb の崩壊定数として，次の式になる.

$$\frac{dy}{dt}=-\lambda y+r(t)$$

(1) この微分方程式を，$y=\cdots$ の積分形にせよ.

(2) ラジウムの半減期 1600 年に対して、フェルメールの絵かどうかは 350 年くらいの話なので、ラジウムの崩壊数 r はほぼ一定と考えてよい．r を定数として，顔料製造の時刻を t_0，$y(t_0)=y_0$ を用いて，y について解け.

(3) y, r は測定可能，$\lambda=3.151\times10^{-2}$ は既知である．顔料を作る前の鉱石もラジウムと鉛の平衡状態であり，$\lambda y_0=R$ は，$0<R<200$ 程度であることが知られている．判定を依頼された絵は，$\lambda y=8.5,\ r=0.8$ であった．本物だろうか.

2.6.2 ロケットの燃料はどれだけ必要か

例題 2.32
ロケットが，燃料を噴射しながら一定の推進力を得て加速している状況を考える．ロケットの速度が v のとき，ロケットの質量を $m(v)$ とする．質量 Δm の燃料を速度 u で放出しながらロケット本体の速度を v から Δv だけ加速させたとすると，どのような微分方程式が成り立つか.

例題 2.33
$v=0$ のときのロケットの質量を M_0 とする.

$$\frac{dm}{dv}=-\frac{m}{V}\quad(V:\text{定数})$$

を解いてロケットの運動を論ぜよ.

2.6.3 水時計の設計

例題 2.34
半径 R の円柱容器を使って水時計を作る．円柱に等間隔に目盛をつけておくと，容器中の液体の表面が目盛を通過する時間間隔はどのようになるだろうか.

例題 2.35
流出する流体の量が時間と共に常に一定になるようにするためにはどのような容器の形状にすればよいか.

2.6.4 研究課題 1:空気抵抗

質量の増加する雨滴

研究課題 2.1
雨滴は小さな水滴が合体しながら大きく成長して落下してくると考えられる．はじめに質量 m_0 の雨滴が初速度ゼロで落下を始めたとして，次の 2 つの場合で雨滴の終端速度を考えよ．雨滴は粒子の速度 v に比例する抵抗を受けて落下する.

(1) 雨滴の質量 m が一定の割合で増加するとき，すなわち

$$\frac{dm}{dt}=\alpha\qquad(\alpha:\text{定数})$$

とするときはどうか.

(2) 雨滴の質量 m が速度 v に比例して増加するとき，すなわち

$$\frac{dm}{dt} = \beta v \qquad (\beta : \text{定数})$$

とするときはどうか．

ただし，質量が変化するときの運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg - kv \qquad (k : \text{定数})$$

で与えられる．

速度の 2 乗に比例する抵抗

研究課題 **2.2**
例題 2.12 で扱った，抵抗力が働くときのボールの軌跡を，速度の 2 乗に比例する抵抗力の場合に置き換えて調べよ．抵抗力の大きさは，単位質量あたりの比例定数を K として，$-Kmv^2$ とする．

2.6.5　研究課題 2:広告の威力

研究課題 **2.3**
ある商品の売り上げ $S(t)$ は，時間 t の関数として微分方程式

$$\frac{dS}{dt} = -kS + a(t)\frac{M-S}{M} \qquad (k > 0 : \text{定数})$$

で与えられる．右辺第 1 項は広告を打たないと売り上げが次第に落ちることを示し，第 2 項は広告の効果で売り上げ限界 M に達するまでに，まだ売れていない客層にアピールすることを示す．関数 $a(t)$ は広告がもたらす効果の関数とする．

(1) $a(t)$ が，初めの時刻 T まで一定値，時刻 T 以降はゼロ，すなわち

$$a(t) = \begin{cases} a \quad (\text{一定}) & (0 \le t \le T) \\ 0 & (T \le t) \end{cases}$$

とするとき，S はどのような関数になるか．

(2) 長期間の一定したキャンペーンと，短期間の大規模キャンペーンを複数回行うのとでは，どちらが効果が高いだろうか．適当な関数を仮定して論ぜよ．

2.6.6　研究課題 3:伝染病の流行モデル

章末問題

$\boxed{2.1}$ つぎの微分方程式の解を求めよ．ただし，α, β は定数とする．

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = \beta, \quad y(0) = 0.$$

$\boxed{2.2}$ (コーヒーの温度)
室温が 10 [^{o}C] の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は，時刻 t におけるコーヒーの温度 $T(t)$ [^{o}C] と室温との差に比例する．すなわち，

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-10) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる．$t = 0$ で，90 [^{o}C] であったコーヒーが，2 分後に 60 [^{o}C] になったとき，40 [^{o}C] になるのは何分後か．$\log 2 = 0.6931, \log 3 = 1.099, \log 5 = 1.609$ とする．

$\boxed{2.3}$ (慣性抵抗)
落下傘・スカイダイビングなど落下速度 v (あるいは運動量 mv) が大きい物体には，速度の 2 乗で効く空気抵抗が働く．質量 m の物体が自由落下するとき，抵抗の比例定数を単位質量あたり K，重力加速度を g とすれば，運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + Kmv^2$$

となる．初速度をゼロとして速度 v の振舞いを論ぜよ．

$\boxed{2.4}$ (化学反応の速度)
化学反応 A+B→C の速度は，混合する 2 つの反応物質の濃度に関係する． A,B の濃度をそれぞれ $A(t), B(t)$ とすると，時刻 t における C の量 $x(t)$ は，

$$\frac{dx}{dt} = kAB \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる．初期濃度を $A(0) = a, B(0) = b, x(0) = 0$ とすると，反応式から，$A = a - x, B = b - x$ なので，

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

となる．x を時刻 t の関数として求めよ．ただし，$a \neq b$ とする．

$\boxed{2.5}$ (**Lambert-Beer** の法則)
光が薄い膜を通過するときに吸収される率は，層の厚さと光の強度に比例する．膜に入射する位置を $x = 0$，膜内の通過距離を x とする．この法則を微分方程式で表現し，任意の位置 x における光の強度 $I(x)$ を求めたい．

(1) 必要な文字を補い，微分方程式を立てて $I(x)$ を求めよ．

(2) 光の強度 $I(x)$ のグラフを描け．ただし，入射する光の強さを I_0，層の厚さを d とする．