4.3.4　固有値が共役な複素数の場合

例題 4.4
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

問題 4.5
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

4.3.5　固有値が縮退する場合

4.3.6　まとめ

4.4　定数係数連立微分方程式の一般的な取り扱い

4.4.1　解核行列

例題 4.6
次の行列に対する解核行列を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.4.2　対角化可能な行列の場合

例題 4.7
連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ を解け．

4.4.3　一般スペクトル分解を用いた表現

4.5　非同次連立微分方程式

4.5.1　一般解導出の方針

例題 4.8
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式を解け．

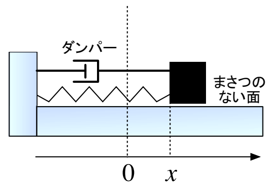
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 20\cos 2t \end{pmatrix}$$

4.5.2　システム制御と安定性解析

例題 4.9
例題 3.11 で扱った抵抗力を伴う振動システム

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(m, c, k は正の定数) で，適当な Lyapunov 関数を定義し，安定性を議論せよ．



4.6　発展的応用

4.6.1　軍備競争モデル

例題 4.10
A 国と B 国の軍備規模をそれぞれ時間 t の関数として $x(t)$, $y(t)$ とする．この量が増大すれば戦争へ，減少すれば平和になると考えて，次のように数学モデルを構築しよう．

- 両国とも相手の国が軍備規模を増大させるならば，それに対抗して自国も軍備増強を行うとする．この効果は，a_1, $a_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，次式で表される．
$$\frac{dx}{dt} = a_1 y, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 x.$$
- 自国の軍備規模が異常に拡大すれば，それを抑制する作用が働くだろう．この効果は，b_1, $b_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，
$$\frac{dx}{dt} = -b_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_2 y.$$
- 相手国に潜在的な不満があれば，軍備を拡張する基盤が生じる．この効果は，c_1, $c_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，
$$\frac{dx}{dt} = c_1, \qquad \frac{dy}{dt} = c_2.$$

以上 3 つの効果をすべて含めると，次の連立微分方程式になる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b_1\,x + a_1\,y + c_1 \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_2\,x - b_2\,y + c_2 \end{cases}$$

(1) 相手国に潜在的な不安がない ($c_1 = c_2 = 0$) とき，非武装の平和（$x = y = 0$）が成り立つことを確かめよ．

(2) 相手国に潜在的な不安があると，相互非武装は長続きしないことを確かめよ．

(3) A, B 両国の軍備拡張が平衡状態になった ($\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$) とする．このときの (x, y) の値 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ

(4) $u = x - \overline{x}, v = y - \overline{y}$ として，(u, v) に対する微分方程式を求め，それらの解は，どちらも共通の微分方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (b_1 + b_2)\frac{dz}{dt} + (b_1\, b_2 - a_1\, a_2)z = 0$$

の解であることを示せ．

(5) (4) の微分方程式を解いて，平和を得るための条件を論ぜよ．

4.6.2　連成振動

例題 4.11
質量が同じ m の 2 つの物体が，3 本のばね（ばね定数は k_1, k_2）で図のようにつながれている．それぞれの物体の位置 x_1, x_2 は，時間 t を変数とする連立微分方程式

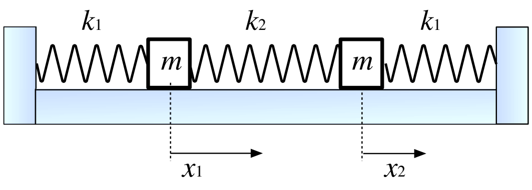
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} &= k_2x_1 - (k_1 + k_2)x_2 \end{cases}$$

にしたがう．

(1) 速度 $v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}, v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ も変数にもちいて，1 階の微分方程式の組にして解け．

(2) 次の初期条件のもとでの運動を論じよ．

  (1) $t = 0$ で，$x_1 = x_2 = a, v_1 = v_2 = 0$ のとき．
  (2) $t = 0$ で，$x_1 = a, x_2 = -a, v_1 = v_2 = 0$ のとき．
  (3) $t = 0$ で，$x_1 = a, x_2 = 0, v_1 = v_2 = 0$ のとき．



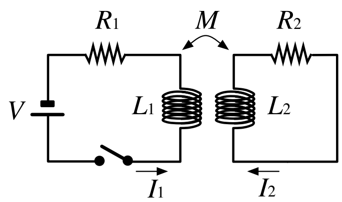
例題 4.12
例題 4.11(1) を $q_1 = x_1 + x_2$, $q_2 = x_1 - x_2$ という変数に変えて解け．(q_1 は**重心座標**の 2 倍，q_2 は**相対座標**の意味をもつ）．

4.6.3　相互誘導回路

例題 4.13
図に示すような相互誘導回路で，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れたとき，回路に流れる電流 $I_1(t), I_2(t)$ を求めよ．回路の方程式は，

$$\begin{cases} V = L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} + R_1I_1 \\ 0 = M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} + R_2I_2 \end{cases}$$

である．ただし，L_1, L_2, M は正の定数であり，$L_1L_2 - M^2 \neq 0$ とする．



4.6.4　捕食者/被食者モデル

例題 4.14
ウサギ（個体数 x）とキツネ（個体数 y）は，捕食者/被食者の関係にあり，次の連立微分方程式で関係づいている．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x(a_1 - b_1y), \\ \dfrac{dy}{dt} &= -y(a_2 - b_2x). \end{cases}$$

ここで，a_1, a_2, b_1, b_2 は正の定数とする．

(1) ウサギもキツネも個体数に増減のない平衡状態の解 (x_0, y_0) を 2 つ求めよ．

(2) (x_0, y_0) の点の微小量の摂動を考えることにより，平衡状態の解 (x_0, y_0) の相図上での位置づけを述べよ．

(3) xy 平面での相図を描け．