微分方程式（真貝）第 2 回中間テスト D

学生番号 ____-______ 氏名 ____________

【重要】解答は別紙に．答えだけではなく，導出の過程も記すこと．
解答順は自由．スペースが足りなければ，裏面を用いよ．

$\boxed{1}$ 次の微分方程式を立式せよ．必要であれば，各自で文字を補え．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\sin x$ である曲線が満たす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で減少していく放射性元素の数を求める微分方程式．

(3) 質量 m の落下傘が重力 mg を受けて落下するとき，高さ y が満たす運動方程式は，

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

である．さらに，速度の 2 乗に比例する抵抗力が加わるとすると，どのような式になるか．

$\boxed{2}$ 一般解を求めよ．初期条件が与えられているものは，特殊解を求めよ．

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4y$　初期条件：$y(0) = 3,\ \dfrac{d}{dt}y(0) = 8.$

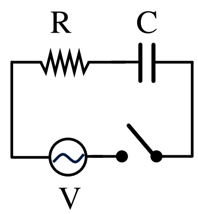
$\boxed{3}$ 「初期値問題」とは何か．説明せよ．

$\boxed{4}$ （1 階微分方程式）

抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 直列回路に，起電力 $V = V_0 \sin\omega t$ の交流電源を接続し，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる．コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は，微分方程式

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす． $Q(t)$ を求め，$t \to \infty$ でのふるまいを説明せよ．



$\boxed{5}$ （2 階微分方程式）

質量 m の質点が，ばね定数 k (> 0) のばねにつながれており，さらに，時間で変動する外力 $F(t) = F_0 \cos\omega t$ を受けているとする．バネのつりあいの位置からの質点の変位を x とし，運動方程式を立てると，次のようになる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos\omega t$$

(1) 右辺をゼロとしたときの，同次式の一般解を求めよ．

(2) $k \neq m\omega^2$ とする．外力があるときの一般解を求めよ．

(3) $k = m\omega^2$ の場合，この方程式の一般解を求めよ．