

微分方程式 (真貝)
第1回中間テスト H

学生番号 _____ 氏名 _____

【重要】解答は別紙に。答えだけでなく、導出の過程も記すこと。
解答順は自由。スペースが足りなければ、裏面を用いよ。

- 1 $y(t) = A \sin kt + B \cos kt$ (A, B は任意定数, k は定数) が, 次式を満たすことを示せ。
Show that $y(t) = A \sin kt + B \cos kt$ ($A, B, k; \text{const.}$) satisfies the following differential eq.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y$$

- 2 $y(x)$ である。一般解を求めよ。初期値が与えられた式は特殊解を求めよ。
Let $y(x)$. Find the general solution. If an initial condition is given, find a special solution.

- (a) $\frac{dy}{dx} - xy = 0$
(b) $\frac{dy}{dx} + 3y = 0, y(0) = 2$
(c) $\frac{dy}{dx} + 3y = 4e^{5x}$
(d) $\frac{dy}{dx} + 3y = 3 \sin 2x + 2 \cos 2x$

- 3 $y(x)$ に関する微分方程式 $y' + 2y = -e^{2x}y^2$ を解け。
ヒント：両辺を y^2 で割り, $u(x) = y^{-1}$ と置換。
Solve $y' + 2y = -e^{2x}y^2$ for $y(x)$. Hint: divide by y^2 , then substitute y as $u(x) = y^{-1}$.

- 4 カップに入れた飲み物の温度の時間変化率は、そのときの室温との差に比例する。室温が $20 [^{\circ}\text{C}]$ のとき、時刻 t におけるコーヒーの温度 $T(t) [^{\circ}\text{C}]$ は、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる。いま、 $t = 0$ で $100 [^{\circ}\text{C}]$ だったコーヒーが、2分後に $80 [^{\circ}\text{C}]$ になった。 $40 [^{\circ}\text{C}]$ になるのは何分後か。 $\log 3 = 1.099, \log 4 = 1.386$ とする。

The temperature T of a cup of coffee decreases with time t , obeying the above differential equation in the room with $20 [^{\circ}\text{C}]$. If T is $100 [^{\circ}\text{C}]$ at $t = 0$ and $80 [^{\circ}\text{C}]$ at $t = 2(\text{min})$, then when it decreases to $T = 40 [^{\circ}\text{C}]$?

- 5 一般解と特殊解の違いを説明せよ。
Explain the difference between general solution and special solution.