微分方程式（真貝）
第 1 回中間テスト K

学生番号 ＿＿-＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿

【重要】解答は別紙に．答えだけではなく，導出の過程も記すこと．
解答順は自由．スペースが足りなければ，裏面を用いよ．

$\boxed{1}$ 次の微分方程式を立式せよ．必要であれば，各自で文字を補え.

(a) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\cos x$ である曲線がみたす微分方程式.

(b) 時間に対して一定の割合で増加していくインフルエンザ感染者数を求める微分方程式.

(c) x 方向に動く物体で，加速度が原点からの距離に比例することを示す微分方程式.

(d) 半径 r の球の体積 $V(r)$ は $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ である．球形の風船に毎秒一定量の体積の息を吹き込むとき，風船の半径 r がみたす微分方程式はどうなるか.
ヒント．微小量 Δr だけ半径が増加する時の体積は，$V(r+\Delta r)$ であり，体積差は $\Delta V = V(r+\Delta r) - V(r)$ で計算できる．$(\Delta r)^2$ は微小量として無視してよい.

$\boxed{2}$ $y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$（$A, B$ は任意定数，ω は定数）が，次式を満たすことを示せ.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

$\boxed{3}$ $y(x)$ である．一般解を求めよ．初期値が与えられた式は特殊解を求めよ.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - 4x = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - 4xy = 0$

(c) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0,\ y(0) = 2$

(d) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 10e^{5x}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 26\sin x$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 2e^{-5x}$

$\boxed{4}$ カップに入れた飲み物の温度の時間変化率は，そのときの室温との差に比例する．いま，室温が 20 [°C] のとき，時刻 t におけるスープの温度 $T(t)$ [°C] は，

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となるとしよう．$t=0$ で 80 [°C] だったスープが，3 分後に 60 [°C] になった．6 分後は何 [°C] か.