

1 Mathematica を用いた数学実習

Mathematica は, Wolfram 社の販売する数式処理ソフトです. グラフ化やシミュレーションまで, 今後の学習・研究に役立つことでしょう.

- 情報科学部ではサイトライセンス契約で利用可能となっています.
- 利用方法の詳細は, 次のページを参照してください. (講義ページからリンクされています).
<https://www.oit.ac.jp/is/shinkai/lecture/mathematica.html>

演習室の PC からの起動方法 (Windows から)

- 普通のソフトウェアと同じように, 「アプリ一覧」から「Wolfram Mathematica」を選択する. (「Wolfram Mathematica Kernel」ではない.)
- 起動したら, 「ファイル」>「新規作成(N)」>「ノートブック(.nb)(N)」を選び, ノートブック画面を出す. 5! と入力し, 「shift+中央の enter」または「右端の enter」とキーボードを押して, 120 と計算されるかどうか確かめよう.

本日の課題

M.1 教科書¹の p204–209 (§7.2.1 基本的な数式処理 から §7.2.4 基本的な描画 まで)を熟読しながら, すべて実行して確かめよ.

M.2 【教科書 p48 例題 2.5 Malthus の人口モデル】微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k > 0) \quad (1.1)$$

の一般解は, $x(t) = x_0 e^{kt}$ (x_0 : 定数) であった.

(1) 時刻 $t = 0$ での人口を $x(0) = 100$ とし, $k = 0.1, 0.2, 0.3$ としたときの $x(t)$ のグラフを描け.

```
Xend=20; k = 0.1; p1 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
k = 0.2; p2 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
k = 0.3; p3 = Plot[100*Exp[k*x], {x, 0, Xend}]
Show[p1, p2, p3]
```

(2) $k = 0.1$ とし, $x_0 = 100, 200, 300$ としたときの $x(t)$ のグラフを描け.

M.3 【教科書 p49 例題 2.6 ロジスティックモデル】微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x \quad (a > 0, b > 0) \quad (1.2)$$

の一般解は, $x(t) = \frac{a}{Ce^{-at} + b}$ (C : 定数) であった. $x(0) = 100$ とする.

(1) $a = 0.1$ とし, $b = 0, 0.0001, 0.0002$ の 3 つの場合を考える. それぞれの場合の積分定数 C の値を求めよ.

(2) 上記の 3 つの場合について, $x(t)$ のグラフを描け.

¹ 「徹底攻略 常微分方程式」(真貝著, 共立出版, 2010 年 8 月) 2021 年印刷版から §7.2 は Mathematica 12 に対応.

M.4 【教科書 p54 例題 2.12 空気抵抗のある場合のボールの軌跡】

水平方向を x 軸, 鉛直方向を y 軸 (上向きが正) に取り, ボールを投げる位置を原点とする. 抵抗の比例定数を k , 粒子の質量を m , 重力加速度を g , 時刻 t での速度を $(v_x(t), v_y(t))$ とすれば, 運動方程式は,

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x \quad (1.3)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \quad (1.4)$$

となる. 初速度を v_0 , 投げ上げる角度を θ とすれば, 初速度の x, y 成分は $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ となる. ボールは, 時刻 $t = 0$ で原点にあるとする.

(1) 空気抵抗がない場合 ($k = 0$), この微分方程式を解き,

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \theta)t \\ y(t) &= (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

であることを示せ.

- (2) (1) の解で, $v_0 = 10[\text{m/s}]$, $g = 9.8[\text{m/s}^2]$ とし, θ を変化させて, $\theta = \pi/4$ のときに, もっとも遠くまでボールが飛ぶことを図で示せ. (教科書 p54 の図を描け).²
- (3) 空気抵抗がある場合の微分方程式 (1.3), (1.4) を解き, 解が

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mv_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-(k/m)t}) \\ y(t) &= \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-(k/m)t}) - \frac{mg}{k}t \end{aligned}$$

であることを示せ.

- (4) (3) の解で, $v_0 = 10[\text{m/s}]$, $g = 9.8[\text{m/s}^2]$ とし, $k = mg/v_0$ として, θ をいろいろと変え, 最大の飛距離を得る場合をグラフで示せ. (教科書 p55 の図を描け). m の値は適当に想定してよい.

M.5 【教科書 p82 研究課題 2.2 空気抵抗が速度の 2 乗に比例する場合のボールの軌跡】

雨滴の場合は速度に比例する抵抗力 (これを粘性抵抗という) だが, 落下傘・パラシュートなど運動量が大
きな物体に対しては, 速度の 2 乗に比例する抵抗力 (慣性抵抗) がはたらくことが知られている.

上記 **M.4** で扱った, 抵抗力がはたらくときのボールの軌跡を, 速度の 2 乗に比例する抵抗力の場合に置き換えて解き³, 解いた結果を同様にグラフにして示せ.

M.6 教科書の p210 (§7.2.5 微分方程式を解く) を読み, DSolve のコマンドがどの程度使えるものなのか, 教科書の例題等を実行して確かめよ.

² ヒント: パラメータ表示された曲線を描く方法として, 例えば半径 2 の円を描くときに $(x, y) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ として `ParametricPlot[{2 Cos[t], 2 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}]` というコマンドがある.

³ 教科書の章末問題 **2.3** では, 抵抗力が速度の 2 乗に比例する場合の一直線上の運動を取り上げています. ヒントにしてください.