

微分方程式 (1年) 期末試験 2014年1月29日

微分方程式

真貝寿明
大島一能

IS科 IN科1年

参照可能物 なし

【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけでなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 (自然現象のモデル化, 20点)

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。

- (1) xy 平面上の各点で、接線の傾きが $\cos x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 時間に対して一定の割合で増加していくインフルエンザ感染者数を求める微分方程式。
- (3) x 方向の加速度が、原点からの距離に比例することを示す微分方程式。
- (4) 半径 r の球の体積 $V(r)$ は $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ である。球形の風船に毎秒一定量の体積の息を吹き込むとき、風船の半径 r がみたす微分方程式はどうなるか。
ヒント。微小量 Δr だけ半径が増加する時の体積は、 $V(r + \Delta r)$ であり、体積差は $\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r)$ で計算できる。 $(\Delta r)^2$ は微小量として無視してよい。

問題 2 (基本的な微分方程式, 30点)

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解 (初期条件が与えられているものは特殊解) を求めよ。

- (1) $y' + 5y = 0, y(0) = 2$
- (2) $y' + 5y = 10e^{5x}$
- (3) $y' + 5y = e^{-5x}$
- (4) $y' + 5y = 26 \cos x$
- (5) $y'' - 4y = 0$
- (6) $y'' - 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4$

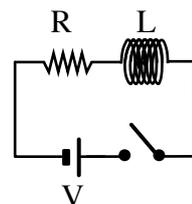
以下の3問のうち、2問を選択して解答せよ。 _____

問題 3 (1階微分方程式の応用, 25点)

抵抗値 R の抵抗とインダクタンス L のコイルで構成される RL 直列回路に、起電力 V (一定) の直流電源を接続し、時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる。電流 $I(t)$ に関する微分方程式は、

$$V - L \frac{dI}{dt} = RI$$

となる。 $I(t)$ を求め、グラフの概形を描け。



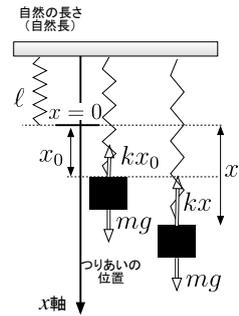
問題 4

(2階微分方程式の応用, 25点)

鉛直面上で上下に振動するばねに取り付けられた物体の運動を考えよう。長さ l のばねを天井に取り付け、鉛直に垂らす。ばねの最下点を原点とし、下向きに x 軸を取る。質量 m の物体を取り付けると、物体には鉛直下向きに重力 mg が働くとともに、ばねの伸びが x のときには弾性力 kx を受ける。重力と弾性力が釣りあって、おもりが静止するとき、ばねの伸びを x_0 とすると、力のつりあいから $0 = mg - kx_0$ 、すなわち、 $x_0 = mg/k$ が成り立つ。おもりが位置 x のときの運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

である。この式の一般解を求め、振動の中心・振動の周期を求めよ。



問題 5

(微分方程式の概念, 25点)

- (1) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ。
- (2) 「線形微分方程式」と「非線形微分方程式」の違いを説明せよ。
- (3) 「初期値問題」とは何か。説明せよ。
- (4) 微分方程式の解として「一般解」と「特殊解」の違いを説明せよ。
- (5) 2階微分方程式の解を求める際の「基本解の1次独立性」について説明せよ。