

微分方程式（1年）2019年度 期末試験

担当：真貝寿明・大島一能

対象：IS科 IN科 1年

参照可能物：なし

- 【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけではなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 （自然現象のモデル化，20点）

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。

- (1) xy 平面上の各点で、接線の傾きが $\tanh x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 時間に対して一定の割合で成長してゆく雪の結晶の大きさを求める微分方程式。
- (3) r 方向の加速度が、原点からの距離の2乗分の1に比例する成分と、原点からの距離の3乗分の1に比例する成分とで決まる微分方程式。
- (4) 一辺の長さが r の正三角形を一辺の長さが $r + dr$ に相似拡大したとき、面積 $S(r)$ がどれだけ増加するかを表す微分方程式。

問題 2 （基本的な微分方程式，30点）

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ。

- (1) $y' + 5y = 0, y(0) = 3$
- (2) $y' + 5y = 6e^x$
- (3) $y' + 5y = e^{-5x}$
- (4) $y' + 5y = 26 \sin x$
- (5) $y'' + 5y' - 6y = 0$
- (6) $y'' + 5y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7$

以下の3問のうち、2問を選択して解答せよ。

問題 3 (1階微分方程式の応用, 25点)

室温が $10 [^{\circ}\text{C}]$ の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は、時刻 t におけるコーヒーの温度 $T(t) [^{\circ}\text{C}]$ と室温との差に比例する。すなわち、

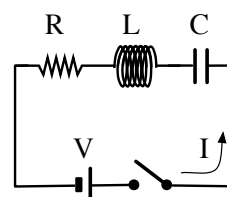
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 10) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる。 $t = 0$ で、コーヒーの温度が $100 [^{\circ}\text{C}]$ のとき、温度変化のグラフの概形を示せ。また、1分後に $70 [^{\circ}\text{C}]$ になったとき、2分後 ($t = 2$) には何度になっているか。

問題 4 (2階微分方程式の応用, 25点)

抵抗値 R の抵抗、インダクタンス L のコイル、容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える。 V を回路の起電力とすると、キルヒホフの法則により、時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ。

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}$$



R, L, C は正の定数とし、 $CR^2 < 4L$ の関係があるとする。いま、電源として直流電源 $V = (\text{一定})$ をつなぎ、時刻 $t = 0$ でスイッチを入れた。この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め、グラフの概形を示せ。

問題 5 (微分方程式の概念, 25点)

- (1) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ。
- (2) 線形常微分方程式の定義を述べよ。
- (3) 「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ。
- (4) 次の表は常微分方程式の分類である。空欄を埋めよ。次のいずれかが入る。
同次型・非同次型・解析解・数値解・線形・非線形・定数係数・変数係数・1階・2階・ベルヌーイ型・リッカチ型

		(a) 微分方程式	(b) 微分方程式
(c)	微分方程式	変数分離法・積分因子法などで解くことができる。	解けるものが知られている。 解いた人の名前が冠されている。
(d)	微分方程式	(c) 微分方程式の解をもとにして、未定係数法・定数変化法などで解くことができる。	解けるものが知られている。 解いた人の名前が冠されている。