

微分方程式（1年）2021年度 期末試験

担当：真貝寿明・大島一能

対象：IS科 IN科 1年

参照可能物：なし

- 【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけではなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 （自然現象のモデル化，20点）

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。

- (1) xy 平面上の各点で、接線の傾きが $\sinh x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 新型コロナ感染者数が、ある地域で、感染者数の3乗に比例して増加していると共に感染者数の2乗の比例して回復していく。感染者数に対する微分方程式はどうか。
- (3) 質量と電荷が $m_1, q_1 (> 0)$ の分子が同じく $m_2, q_2 (< 0)$ の分子と距離 r だけ離れている。電気的な力で運動する運動方程式は、比例定数を k として、

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

である。さらに、分子の間で距離の3乗に反比例する力が加わるとすると、どのような式になるか。

- (4) 半径 R の球形の風船が、時間 dt の間に一定の空気が送り込まれ、半径 $R + dR$ の球形に膨張した。半径 R の増加速度 $\frac{dR}{dt}$ を求める微分方程式はどうか。

問題 2 （基本的な微分方程式，30点）

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ。

- (1) $y' + 3y = 0, y(0) = 2$
- (2) $y' + 3y = 6e^{3x}$
- (3) $y' + 3y = 6e^{-3x}$
- (4) $y' + 3y = 10 \sin x, y(0) = 2$
- (5) $y'' + 2y' - 3y = 0$
- (6) $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0$

以下の3問のうち、2問を選択して解答せよ。

問題 3 (1階微分方程式の応用, 25点)

雨滴が無敵大の速さにならないのは、空気抵抗により減速されるからである。ここでは、空気抵抗が物体の速度 v に比例すると考えよう。すなわち、時間を t 、抵抗の比例定数を k 、雨滴の質量を m 、重力加速度を g とすれば、運動方程式は、鉛直上向きを正として

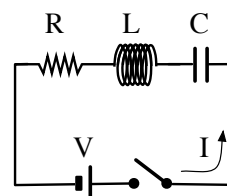
$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

となる。初速をゼロとして速度 $v(t)$ を求め、グラフを描け。また、雨滴の終端速度（最終的に一定となる速度）はどうなるか答えよ。

問題 4 (2階微分方程式の応用, 25点)

抵抗値 R の抵抗、インダクタンス L のコイル、容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える。 V を回路の起電力とすると、キルヒホフの法則により、時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ。

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}$$



R, L, C は正の定数とし、 $CR^2 < 4L$ の関係があるとする。いま、電源として直流電源 $V = (\text{一定})$ をつなぎ、時刻 $t = 0$ でスイッチを入れた。この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め、グラフの概形を示せ。

問題 5 (微分方程式の概念, 25点)

- (1) 微分方程式の「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ。
- (2) 関数の独立性の定義と判定方法を述べよ。
- (3) 運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t)$ を数値計算することになった。使おうとしている手法は、1階の微分方程式 $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$ を解くものである。この手法を使う際には、運動方程式をどのように変形すればよいか。
- (4) $y(x)$ に対する微分方程式

$$ay'' + by' + cy = 0$$

の特性方程式を導け。 a, b, c は定数とする。